This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

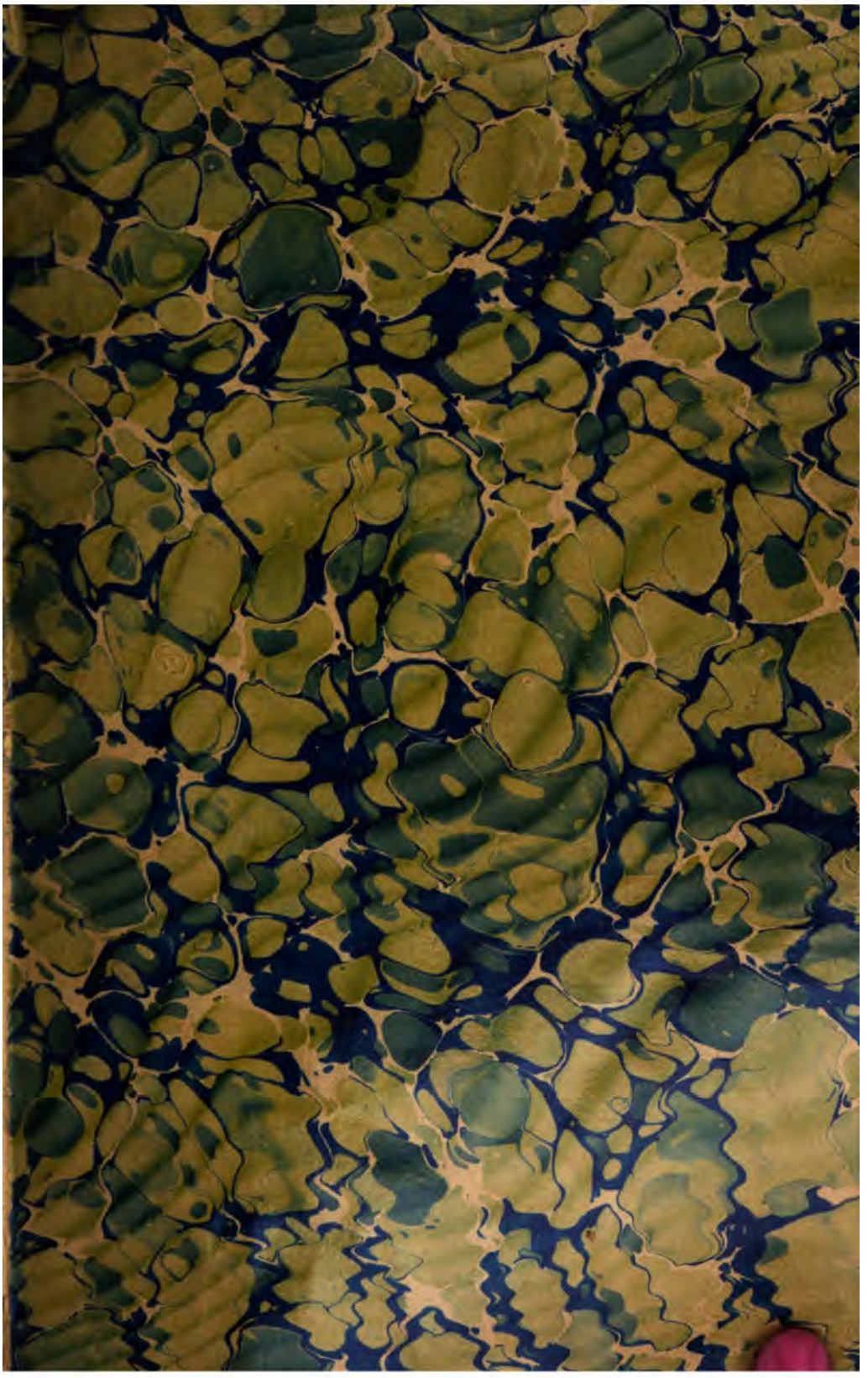
+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



QA
80
.N32
1991

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS DE MÉCANIQUE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

Alexander Ziwet

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS DE MÉCANIQUE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Claude Louis Marie Henri

PAR M. NAVIER,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, PROFESSEUR D'ANALYSE ET DE MÉCANIQUE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, INSPECTEUR DIVISIONNAIRE DES PONTS ET CHAUSSÉES, ETC.

PARIS,

CARILIAN-GŒURY ET V^OR DALMONT, ÉDITEURS,

LIBRAIRES DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n°s 39 et 41.

1841.

ferst ed. 1826

Prof. A. Zivet
gt.
12-23-1922

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS DE MÉCANIQUE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

I. PRINCIPES DE LA STATIQUE. COMPOSITION DES FORCES.

1. L'idée que l'on attache au mot force est celle d'une cause qui tend à mettre un corps en mouvement. Si le corps ne peut céder à cette action, parce qu'il est retenu par un obstacle qui s'oppose à son déplacement, l'effet de la force consiste alors dans la production d'un *effort* ou *pression*.

La notion de l'effort ou pression est identique avec celle du *poids*. Divers efforts, pressions ou poids, sont des quantités comparables entre elles, dont la considération a exigé l'établissement d'une unité spéciale. Dans les calculs de statique, les nombres qui expriment les valeurs des forces représentent des unités de poids.

Les lois suivant lesquelles les forces se combinent

413446

entre elles pour produire un effort déterminé, ou se détruisent réciproquement, c'est-à-dire se font mutuellement équilibre, sont l'objet de la statique.

2. La considération des phénomènes d'équilibre, devenue l'objet d'une théorie mathématique, a nécessairement exigé plusieurs abstractions. Ainsi, dans les premières études, on ne considère pas la figure des corps, mais seulement les points auxquels les forces sont appliquées; on fait abstraction du poids propre des corps dû à l'action de la gravité; enfin on ne considère pas la propriété des corps solides de changer en partie de figure par l'effet des efforts auxquels ils sont soumis. Les corps naturels sont remplacés par la conception purement mathématique d'un système de points matériels réunis par des lignes ou des plans parfaitement rigides et inextensibles, et quelquefois par des fils également inextensibles, mais parfaitement flexibles. De telles abstractions n'empêchent pas que la théorie dont il s'agit ne donne les lois véritables d'un ordre important de phénomènes, et ne devienne un guide nécessaire dans les travaux des arts.

3. Les principes de la statique sont fondés sur un petit nombre d'axiomes dont la vérité doit être admise comme une conséquence immédiate de l'observation des faits naturels. Lorsque plusieurs forces sont dirigées suivant une même ligne, l'effort qu'elles produisent est égal à la somme des efforts qui seraient produits séparément par les forces agissant dans un sens, moins la somme des efforts qui seraient produits par les forces agissant dans le sens opposé. Une force peut être regardée comme appliquée

à un point quelconque de sa direction, la ligne suivant laquelle agit cette force étant supposée parfaitement rigide et inextensible. Lorsqu'un système de forces appliquées à plusieurs points est en équilibre, l'équilibre n'est pas troublé lorsque quelques-uns de ces points deviennent fixes. Deux systèmes en équilibre peuvent être superposés, c'est-à-dire qu'ayant placé l'un des systèmes sur l'autre, de manière à faire coïncider quelques-unes de leurs parties, on peut admettre que ces parties soient ensuite réunies et assujetties les unes aux autres : l'équilibre subsistera dans le nouveau système comme il subsistait séparément dans chacun de ceux qui ont servi à le former.

4. Il existe dans la statique plusieurs *principes*, c'est-à-dire plusieurs propositions primordiales qui peuvent être établies immédiatement, et servir de point de départ pour développer les vérités dont cette science se compose.

Le *principe du levier* consiste en ce qu'une ligne inflexible horizontale étant supportée au milieu, et chargée aux extrémités de deux poids égaux, 1° il y a équilibre; 2° l'effort exercé sur le point d'appui est égal à la somme de deux poids. La première partie de cette proposition est évidente, mais on peut demander que la seconde partie soit démontrée. Pour y parvenir, on remarque que trois forces égales appliquées à un même point, et dirigées suivant trois rayons qui divisent le cercle en secteurs égaux, sont évidemment en équilibre. Soit maintenant la ligne horizontale AB (*fig* 1). Traçons le parallélogramme ABCD, dont les angles sont égaux au $\frac{1}{6}$ et au $\frac{1}{3}$ de la circonférence. Appliquons à chacun des

quatre angles de cette figure, et dans la direction des côtés, trois forces égales entre elles qui se feront réciproquement équilibre; puis au milieu de la ligne AB quatre forces égales aux précédentes et opposées deux à deux. La figure étant considérée comme un plan rigide, le système sera en équilibre; et si l'on supprime les forces qui se détruisent comme étant égales et opposées, il reste les forces qui doivent se faire équilibre conformément au principe du levier.

5. L'équilibre du levier, dans le cas où le point fixe n'est pas placé au milieu, se déduit immédiatement de la proposition précédente. En effet, soit une ligne horizontale chargée de poids uniformément distribués sur sa longueur, et supportée par un point fixe placé au milieu. Ce système sera en équilibre. $2a$ étant la longueur de la ligne, prenons à l'une des extrémités une longueur $2h$. On pourra, sans détruire l'équilibre, réunir au milieu de chaque partie $2h$ et $2a—2h$ les poids dont elle est chargée, et l'on aura alors un levier dont les bras égaux à $a—h$ et h supportent respectivement à leurs extrémités des poids proportionnels à h et $a—h$.

6. La proposition précédente s'étend facilement au cas où les deux bras du levier ne sont pas en ligne droite. En général, deux forces dirigées dans un même plan se font mutuellement équilibre autour d'un point fixe, lorsqu'elles sont entre elles en raison inverse des longueurs des perpendiculaires abaissées du point fixe sur leurs directions respectives. Le produit d'une force par la longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point fixe sur sa direction est la mesure de l'action de cette

force pour faire tourner le système autour du point fixe. C'est ce qu'on nomme le *moment* de la force.

7. Le *principe du plan incliné* consiste en ce qu'un poids étant placé sur un plan incliné à l'horizon, et retenu par une force dirigée parallèlement au plan, il y a équilibre lorsque le poids est à la force comme la longueur du plan est à sa hauteur. Ce principe a été démontré par Stevin en considérant une chaîne pesante sans fin placée sur un triangle solide qui repose sur sa base horizontale. Cette chaîne se maintient évidemment en repos. Or, la partie inférieure qui pend au-dessous de la base du triangle est elle-même en équilibre. Les deux parties qui reposent sur les deux côtés inclinés du triangle doivent donc faire équilibre l'une à l'autre; d'où l'on conclut la proposition énoncée.

8. La proposition précédente peut servir à démontrer la loi de l'équilibre du levier. Soit en effet un point matériel M placé sur le plan incliné AB(*fig.*2), et sollicité par la force verticale P et par la force Q dirigée dans le sens du plan. L'équilibre subsiste si ces forces sont entre elles dans le rapport des lignes AB, AC. Plaçons la ligne inflexible MD, perpendiculaire sur AB, et qui peut tourner autour du point D supposé fixe; l'équilibre ne sera pas troublé. Supposons ensuite que l'on anéantisse le plan incliné; l'équilibre subsistera encore, car ce plan s'opposait seulement à ce que le point matériel ne pût se mouvoir dans toute autre direction que AB, et le même effet sera produit par la verge MD. Or, les forces P, Q agissent maintenant sur un levier dont le point fixe est en D, et leurs bras de levier respectifs sont les lignes DE et DM, dont le rapport est le même que celui

des lignes AC et AB, c'est-à-dire l'inverse du rapport des forces.

9. Le *principe des moufles* peut également servir de base aux théories de la statique. Un poids P étant soutenu par une moufle mobile à laquelle aboutissent n cordons parallèles entre eux, la force Q, appliquée à l'extrémité du dernier cordon, est égale à $\frac{P}{n}$ lorsque le système est en équilibre. Cette proposition résulte évidemment de ce que la tension du cordon doit être uniforme dans toute sa longueur.

10. Le principe du levier peut en être déduit de la manière suivante. Concevons que l'on ait appliqué sur la moufle le levier BAC (*fig.* 3), dont le point fixe A est placé de manière que AB soit à AC dans le rapport de l'unité au nombre des cordons qui soutiennent le poids P, et admettons que les extrémités B, C du levier soient unies aux points correspondants du fil. La réunion des systèmes du levier et de la moufle formera un système composé, dans lequel les points B et C peuvent prendre les mêmes déplacements infiniment petits qu'ils prendraient si chaque système était seul. Donc si chaque système est en équilibre, ou n'est pas en équilibre sous l'action de forces quelconques, le système composé sera également en équilibre, ou n'y sera pas, sous l'action des mêmes forces.

Cela posé, considérant le système composé auquel aucune force n'est appliquée, appliquons au point B deux forces égales et opposées agissant dans le sens du fil; et appliquons également au point C deux forces égales et opposées agissant dans le sens du fil, moindres que les

précédentes dans le rapport de l'unité au nombre des cordons de la moufle. Le système sera en équilibre, puisque l'on n'a ajouté que des forces qui se détruisent réciproquement. Mais puisque les deux forces tirant de haut en bas appliquées respectivement aux points B,C se font mutuellement équilibre au moyen de la moufle seule, on peut supprimer ces forces sans altérer l'équilibre subsistant. Donc les forces restantes tirant de bas en haut doivent alors se faire équilibre au moyen du levier seul, puisque la réunion de la moufle au levier ne pourrait établir l'équilibre s'il n'existait pas.

11. On peut, au moyen du principe du levier, composer deux forces parallèles, c'est-à-dire trouver une force résultante qui produise sur un système la même action que deux forces parallèles données. Soient deux forces parallèles P,Q agissant aux deux extrémités de la ligne rigide AB (*fig.4*). On conclut de ce qui précède que l'action de ces forces sera entièrement détruite si cette ligne est retenue par un point fixe C, placé de manière que $\frac{AC}{BC} = \frac{Q}{P}$; et de plus que ce point fixe supportera dans une direction parallèle à celle des forces l'effort $P+Q$. Donc on détruirait l'action des deux forces proposées, en appliquant au point C de la verge en sens contraire de la direction de ces forces une force égale à leur somme. Donc l'action des deux forces sur la verge est la même que celle d'une force égale à leur somme, et appliquée au point de cette verge qui la partage en deux parties réciproquement proportionnelles aux forces correspondantes.

12. L'équilibre du levier donne immédiatement l'é-

quilibre de plusieurs forces appliquées à un point matériel. Soient trois forces P, Q, R dirigées dans le même plan, appliquées au point M (*fig.* 5), et supposées en équilibre. Prenons un point A sur la direction de la force R prolongée, et abaissons de ce point les perpendiculaires AB, AC sur les directions des forces P, Q. Considérons BAC comme un levier dont le point fixe serait en A, et supposons ce levier invariablement uni au système donné des trois forces. L'équilibre de ce système ne sera pas troublé. Or on peut maintenant supprimer la force R, qui est détruite par la résistance du point fixe A. Donc les deux forces restantes P, Q se font équilibre sur le levier BAC, d'où l'on conclut que les lignes AB, AC sont réciproquement proportionnelles aux valeurs de ces deux forces, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la direction de la force sera celle de la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent en grandeur et en direction les forces P, Q. On verra de même que la force Q doit être dirigée suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent les forces P, R; et l'on en déduit facilement que chacune des trois forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent les deux autres.

On voit aussi que trois forces appliquées à un même point, et en équilibre, sont entre elles comme les côtés d'un triangle formé par trois lignes respectivement parallèles aux directions de ces forces, et que chacune des forces est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

13. La proposition précédente se déduirait également du principe du plan incliné (*voyez* n° 8). Puisque les forces P, Q se font équilibre autour du point D supposé fixe, ce point est situé sur la direction de la force qui pourrait leur faire équilibre. Or, les perpendiculaires abaissées du point D sur les directions des deux forces leur sont réciproquement proportionnelles : donc ce point appartient à la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent respectivement les forces dont il s'agit.

14. On conclut immédiatement de ce qui précède le principe *de la composition des forces* appliquées à un point matériel. L'action *résultante* de deux forces est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent les *composantes* En effet, une force égale et opposée à cette résultante détruira l'action des deux forces proposées.

Ce principe peut être démontré directement ; mais en général les démonstrations comportent des considérations de limite ou d'infini. Nous indiquerons l'une des plus simples. Considérons le losange ADBD (*fig.* 6), et admettons que l'on ait appliqué aux angles A, B, et dans le prolongement des côtés, quatre forces égales : ce système sera évidemment en équilibre : soit ensuite placé en CBEF un système pareil également en équilibre, l'équilibre subsistera toujours si l'on suppose les deux systèmes réunis. On peut maintenant, sans altérer cet équilibre, supprimer les forces qui se détruisent, et supposer les forces qui s'ajoutent appliquées aux points A, E. Or les résultantes des forces qui seront alors appliquées à l'un et à l'autre de ces deux

$$f(x)=2\left(1\pm\frac{\lambda^2x^2}{2}+\frac{\lambda^4x^4}{2.3.4}\pm\frac{\lambda^6x^6}{2.3.4.5.6}+\text{etc.}\right);$$

c'est-à-dire, en prenant les signes supérieurs,

$$f(x)=2\left(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}\right);$$

et en prenant les signes inférieurs

$$f(x)=2\cos.\lambda x.$$

L'un ou l'autre de ces résultats satisfait à la condition exprimée par l'équation (a); mais le premier est exclu par la nature de la question dont il s'agit, parce qu'en attribuant à la variable x une valeur très-peu différente de zéro, il donnerait pour $f(x)$ une valeur plus grande que 2, d'où l'on conclurait $R>2P$, ce qui est impossible.

Il résulte de ce qui précède que la valeur de la résultante R des deux forces P, dont les directions comprennent l'angle $2x$, est nécessairement représentée par l'expression

$$R=2P\cos.\lambda x,$$

λ désignant une constante dont la valeur est encore indéterminée. Mais si l'on suppose $x=\frac{\pi}{2}$, les deux forces P étant directement opposées l'une à l'autre, $R=0$. Donc $0=\cos.\lambda\frac{\pi}{2}$; et par conséquent $\lambda=2i+1$: de plus on doit prendre $i=0$, sans quoi la résultante R serait nulle dans le cas de deux forces faisant entre elles l'angle aigu $\frac{\pi}{2i+1}$. Ainsi l'on a définitivement

$$R=2P\cos.x,$$

conformément au principe démontré dans le n° (14). On passe facilement du cas de deux forces égales à celui de deux forces inégales dirigées perpendiculairement l'une à l'autre, puis au cas de deux forces inégales dont les directions comprennent un angle quelconque.

16. Le principe de la composition des forces donne immédiatement des formules dont il est utile de garder le souvenir. P,Q désignant deux forces données, et R leur résultante, on a

$$\left.\begin{array}{l} R = P\cos.\alpha + Q\cos.\beta, \\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos.(\alpha+\beta). \\ \sin.\alpha = \dfrac{Q}{R}\sin.(\alpha+\beta),\ \sin.\beta = \dfrac{P}{R}\sin.(\alpha+\beta) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha, \beta \text{ angles compris entre les directions des forces P,Q et la direction de la résultante R.} \\ \alpha+\beta \text{ angle compris entre les directions des forces données P,Q.} \end{array}$$

Les deux dernières équations servent à décomposer une force proposée R en deux autres forces P,Q dirigées suivant des lignes données : on en déduit

$$P = R\,\frac{\sin.\beta}{\sin.(\alpha+\beta)}, \qquad Q = R\,\frac{\sin.\alpha}{\sin.(\alpha+\beta)}.$$

II. COMPOSITION ET ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS FORCES APPLIQUÉES A UN POINT MATÉRIEL.

17. On obtient facilement la résultante commune de plusieurs forces appliquées à un point matériel en prenant d'abord la résultante des deux premières, puis composant cette résultante avec la troisième force, et ainsi de suite.

La résultante de trois forces est représentée par la

diagonale du parallélipipède construit sur les ignes qui représentent ces trois forces.

Si l'on trace dans l'espace un contour polygonal avec des droites parallèles et proportionnelles aux forces proposées, la ligne qui fermera le contour en achevant le polygone représentera en grandeur et en direction la résultante.

Si les forces proposées sont dirigées dans un même plan, la direction de la résultante y sera également dirigée.

Le système des forces proposées est en équilibre si la résultante est nulle. Chacune de ces forces est alors égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres.

18. Les opérations relatives à la composition et à la décomposition des forces s'effectuent avec facilité au moyen des formules données par la géométrie analytique.

Considérons d'abord le cas où les directions des forces sont comprises dans un même plan. Soit A (*fig.*8) le point sollicité par les forces. Traçons dans ce plan les deux axes rectangulaires Ax, Ay. P désignant une force qui est supposée agir en tirant sur le point A, nommons α l'angle compris entre la direction de cette force et la partie de l'axe Ax sur laquelle on compte les abscisses positives. La force P sera entièrement déterminée lorsqu'on donnera sa valeur en unités de poids et l'angle α. Les signes du cosinus et du sinus de cet angle feront connaître dans quel sens agit la force, c'est-à-dire si elle tend à transporter le point A dans le sens des abscisses positives ou des ordonnées positives, ou du côté opposé.

La force P peut être remplacée par ses deux compo-

santes dirigées suivant les axes Ax, Ay, dont les valeurs sont respectivement $P\cos.\alpha$, $P\sin.\alpha$. Désignant par $S.P\cos.\alpha$ et $S.P\sin.\alpha$ la somme des composantes de plusieurs forces P appliquées au point A, par R la résultante de toutes ces forces, et par a l'angle que la direction de R forme avec l'axe des x, on a évidemment

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\sin.\alpha)^2},$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \qquad \sin.a = \frac{S.P\sin.\alpha}{R}.$$

19. Si les forces P proposées sont en équilibre $R = 0$; ce qui suppose que l'on a séparément les deux équations

$$S.P\cos\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad S.P\sin.\alpha = 0.$$

20. Considérons maintenant le cas où les forces P appliquées au point A sont dirigées d'une manière quelconque dans l'espace. Chaque force est toujours supposée agir en tirant sur le point A. Nous faisons passer par ce point trois axes rectangulaires Ax, Ay, Az, et nous désignons par α, β, γ, les angles formés par la direction de la force P avec la partie de chacun de ces axes sur lesquels on compte les coordonnées positives. Chaque force P peut être remplacée par ses trois composantes suivant les axes Ax, Ay, Az, qui sont respectivement $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$. Par conséquent R étant la résultante de toutes les forces P, et a, b, c les angles que la direction de R forme avec les axes Ax, Ay, Az, nous avons ici

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\cos.\beta)^2 + (S.P\cos.\gamma)^2}$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \qquad \cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R}, \qquad \cos.c = \frac{S.P\cos.\gamma}{R}.$$

Les signes de ces cosinus feront connaître le sens suivant lequel agit la résultante R. Lorsque cos.a sera positif, la force R tirera le point A du côté des x positives, et ainsi des autres.

21. Soit une ligne droite formant les angles λ. μ, ν avec les axes des x, des y et des z. Si l'on multiplie respectivement les trois dernières équations par cos. λ, cos. μ, cos. ν, et si on les ajoute, il viendra

$$\begin{aligned} &R\,(\cos.a.\cos.\lambda+\cos.b.\cos.\mu+\cos.c\cos.\gamma)\\ &=SP\,(\cos.\alpha.\cos.\lambda+\cos.\beta.\cos.\mu+\cos.\gamma.\cos.\nu.); \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que la projection de la résultante sur une ligne quelconque est égale à la somme des projections des composantes sur cette même ligne.

La somme des projections des composantes sur une ligne quelconque perpendiculaire à la direction de la résultante est nécessairement nulle.

22. La condition de l'équilibre du système consiste en ce que la résultante R soit nulle, ce qui exige que l'on ait séparément les trois équations

$$S.P\cos.\alpha=0,\qquad S.P\cos.\beta=0,\qquad S.P\cos.\gamma=0.$$

En général un point matériel ne peut demeurer en équilibre qu'autant que les forces qui le sollicitent étant projetées sur une ligne quelconque, la somme des projections est nulle.

Équilibre d'un point matériel assujetti à demeurer sur une surface ou sur une ligne courbe données.

23. Soit en premier lieu un point M (*fig.* 9) assujetti à se mouvoir sur une courbe *mn* tracée dans un plan, et

sollicitée par plusieurs forces dirigées dans ce même plan. On représente, comme dans le n° 18, par P la valeur de l'une quelconque des forces, et par α l'angle compris entre sa direction et l'axe des x. La condition de l'équilibre des forces P consiste évidemment ici en ce que la résultante de ces forces soit dirigée dans le sens de la normale menée à la courbe au point M; car l'action de cette résultante se trouvera alors entièrement détruite par la résistance de la courbe, et ne pourra imprimer au point matériel aucun mouvement. En désignant donc, comme ci-dessus, par R la résultante des forces P, par a l'angle que sa direction forme avec l'axe des x; et se rappelant que la courbe mn étant rapportée aux deux coordonnées rectangulaires x, y, la tangente menée à cette courbe au point M forme, avec l'axe des x, un angle dont la tangente trigonométrique est $\frac{dy}{dx}$; on exprimera la condition de l'équilibre en posant

$$\frac{\sin.a}{\cos.a} = \frac{S.P\sin.\alpha}{S.P\cos.\alpha} = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

ou bien

$$\frac{S.P\cos.\alpha}{S.P\sin.\alpha} = -\frac{dy}{dx}.$$

Cette équation étant satisfaite, l'expression de R et celles de cos. a et sin. a du n° 18 donneront la valeur de la pression supportée par la courbe et le sens dans lequel cette pression est dirigée, puisque l'on connaîtra par les signes de cos. a et sin. a si cet angle appartient à la partie MN ou à la partie MN′ de la normale.

24. Admettons maintenant que le point M soit assujetti à se mouvoir sur une surface, et sollicité par plusieurs forces dirigées arbitrairement. Conservons les dénominations du n° 20, et supposons la figure de la surface donnée par une équation dans laquelle l'ordonnée verticale z est regardée comme une fonction des deux coordonnées horizontales x, y. La condition de l'équilibre consiste en ce que la résultante R des forces P doit être dirigée dans le sens de la normale à la surface. Donc en se rappelant les expressions des cosinus des angles formés par la direction de la normale avec les axes des x, des y et des z qui ont été données n° 217 des *Leçons d'analyse*, on exprimera l'existence de l'équilibre en posant les équations

$$\cos.a = \frac{\text{S.P}\cos.\alpha}{\text{R}} = -\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos.b = \frac{\text{S.P}\cos.\beta}{\text{R}} = -\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}$$

$$\cos.c = \frac{\text{S.P}\cos.\gamma}{\text{R}} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}};$$

que l'on peut réduire aux deux suivantes :

$$\frac{\text{S.P}\cos.\alpha}{\text{S.P}\cos.\gamma} = -\frac{dz}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{\text{S.P}\cos.\beta}{\text{S P}\cos.\gamma} = -\frac{dz}{dy}.$$

Lorsque ces équations seront satisfaites, les expressions

de R et celles de cos. a, cos. b, cos. c du n° 20 feront connaître la pression supportée par la surface, et le sens dans lequel s'exerce cette pression.

25. Si l'équation de la surface proposée était donnée sous la forme

$$F(x, y, z) = 0,$$

il est visible, par le n° 218 des *Leçons d'analyse*, que les conditions de l'équilibre seraient exprimées par deux quelconques des trois équations

$$\frac{dF}{dy} SP.\cos.\alpha = \frac{dF}{dx} S.P\cos.\beta, \quad \frac{dF}{dz} S.P\cos.\alpha = \frac{dF}{dx} S.P\cos.\gamma,$$
$$\frac{dF}{dy} S.P\cos.\beta = \frac{dF}{dy} S.P\cos.\gamma.$$

26. Considérons enfin le cas où le point M, sollicité par les forces P, serait assujetti à demeurer sur une courbe tracée d'une manière quelconque dans l'espace. Supposons cette courbe donnée par deux équations entre y et x, z et x, l'abscisse x étant prise pour la variable indépendante. Le point M ne peut évidemment être en équilibre à moins que la résultante des forces P, qui lui sont appliquées, ne soit dirigée perpendiculairement à la tangente à la courbe, et si cette condition subsiste, l'équilibre aura nécessairement lieu. Donc, en ayant égard aux expressions des cosinus des angles formés par la tangente à la courbe avec les axes des x, des y et des z, qui ont été données dans le n° 223 des *Leçons d'analyse*, on exprimera l'existence de l'équilibre en posant l'équation

$$\cos.a + \frac{dy}{dx}\cos.b + \frac{dz}{dx}\cos.c = 0,$$

c'est-à-dire

$$S.P\cos.\alpha+\frac{dy}{dx}S.P\cos.\beta+\frac{dz}{dx}S.P\cos.\gamma=0.$$

Cette équation étant satisfaite, les expressions de R et celles de cos. a, cos. b, cos. c du n° 20, donneront l'effort exercé sur la courbe et le sens dans lequel cet effort est dirigé.

27. Si la courbe est représentée par deux équations

$$f(x,y,z)=0, \qquad F(x,y,z)=0$$

appartenant à deux surfaces quelconques dont cette courbe est l'intersection, on trouvera, par le n° 229 des *Leçons d'analyse*, pour l'équation exprimant les conditions de l'équilibre

$$\left(\frac{dF}{dy}\frac{df}{dz}-\frac{df}{dy}\frac{dF}{dz}\right)S.P\cos.\alpha+\left(\frac{df}{dx}\frac{dF}{dz}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dz}\right)S.P\cos.\beta$$
$$+\left(\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}-\frac{df}{dx}\frac{dF}{dy}\right)S.P\cos.\gamma=0.$$

Principe des vitesses virtuelles considéré dans l'équilibre d'un point matériel.

28. Le principe des vitesses virtuelles, considéré dans l'équilibre d'un seul point matériel, consiste dans la proposition suivante : Le point M étant soumis à l'action de plusieurs forces P dirigées arbitrairement, admettons que ce point se déplace, et décrive dans une direction quelconque une ligne droite infiniment petite dont nous désignerons la longueur par δs, δ étant un signe de différentiation. Projetons ensuite cette ligne δs sur les directions des forces P : chaque projection me-

surera l'espace parcouru par le point M dans le sens de la direction de chacune des forces, et nous appellerons *moment de la force P* le produit de cette force par l'espace parcouru dans le sens de sa direction, en regardant ce produit comme positif quand l'espace se trouvera décrit dans le sens suivant lequel la force tend à entraîner le point matériel, et comme négatif quand l'espace se trouvera décrit dans le sens contraire. Cela posé, la proposition dont il s'agit consiste en ce que le point M ne peut être en équilibre à moins que la somme des moments des forces P ne soit constamment nulle, quelle que soit la direction suivant laquelle ce point s'est déplacé; et réciproquement l'équilibre subsiste nécessairement si la somme des moments des forces est nulle pour tous les déplacements possibles du point matériel.

Il importe de remarquer d'ailleurs que lorsqu'il s'agit d'un point matériel entièrement libre, la direction de la ligne infiniment petite δs est entièrement arbitraire. Mais quand il s'agit d'un point matériel assujetti à demeurer sur une surface donnée, la ligne δs ne peut plus être dirigée que dans le plan tangent à cette surface; et quand le point matériel est assujetti à demeurer sur une courbe donnée, la ligne δs ne peut plus être dirigée que dans le sens de la tangente à cette courbe.

29. Pour démontrer cette proposition importante, il suffit de remarquer qu'en supposant l'espace δs parcouru dans le sens de la ligne quelconque qui forme avec les axes des x, des y et des z les angles λ, μ, ν, et multipliant par δs les deux membres de l'équation du n° 21, il vient

$$\begin{aligned} &R\delta s(\cos.a.\cos.\lambda+\cos.b.\cos.\mu+\cos.c.\cos.\nu) \\ &= S.P.\delta s(\cos.\alpha.\cos.\lambda+\cos.\beta.\cos.\mu+\cos.\gamma.\cos.\nu). \end{aligned}$$

Or, la quantité δs ($\cos.\alpha.\cos.\lambda+\cos.\beta.\cos.\mu+\cos.\gamma.\cos.\nu$) est la projection de δs sur la direction de la force P, et la quantité δs ($\cos.a.\cos.\lambda+\cos.b.\cos.\mu+\cos.c,\cos.\nu$) est la projection de δs sur la direction de la résultante R : donc l'équation précédente exprime en général que le moment de la résultante de plusieurs forces appliquées à un point matériel est égal à la somme des moments des composantes.

Mais lorsque le point matériel est en équilibre, on a R=0 s'il est entièrement libre ; et l'on a

$$\cos.a.\cos.\lambda+\cos.\mu+\cos.c.\cos.\nu=0$$

si ce point est assujetti à se mouvoir dans une surface ou dans une ligne donnée, puisque la résultante est alors nécessairement dirigée perpendiculairement à la surface ou à la ligne. Donc on a dans tous les cas de l'équilibre d'un point matériel

$$\text{S.P.}\delta s(\cos.\alpha.\cos.\lambda+\cos.\beta.\cos.\mu+\cos.\gamma.\cos.\nu)=0,$$

et réciproquement si cette équation subsiste, l'équilibre des forces P est assuré.

30. Nous représenterons dans la suite par δp la projection sur la direction de la force quelconque P de l'espace δs décrit par le point matériel, et par δr la projection de δs sur la direction de la résultante R ; en sorte qu'on aura

$$\delta p=\delta s(\cos.\alpha.\cos.\lambda+\cos.\beta.\cos.\mu+\cos.\gamma.\cos.\nu$$
$$\delta r=\delta s(\cos.a.\cos.\lambda+\cos.b.\cos.\mu+\cos.c.\cos.\nu).$$

L'équation exprimant que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes s'écrira alors

$$\text{R}\delta r=\text{S.P}\delta p,$$

et l'on aura pour exprimer les conditions de l'équilibre des forces P,

$$S.P\delta p=0. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

On considère dans ces équations p et r comme représentant les distances du point matériel M à certains points fixes pris sur la direction des forces P et R. Ces distances sont des fonctions des coordonnées x,y,z du point M. Les quantités infiniment petites δp, δr, représentent les variations que les distances p et r ont subies lorsque le point M s'est déplacé de la quantité infiniment petite δs, déplacement qui répond lui-même à des variations $\delta x,\delta y,\delta z$ subies par les coordonnées de ce point. Les valeurs des forces P sont également considérées en général comme données en fonction des coordonnées x,y,z, appartenant à la position actuelle du point matériel.

Il est aisé d'ailleurs de reconnaître que la seule équation (A), à laquelle on joindra les équations exprimant les conditions du déplacement du point matériel, s'il n'est pas entièrement libre, suffit pour donner les conditions de l'équilibre, telles qu'elles ont été obtenues dans les nos 19 et suivants.

En effet, remarquons que δp étant la projection de δs sur la direction de la force P, on a

$$\delta p = \delta s(\cos.\lambda.\cos.\alpha+\cos.\mu.\cos.\beta+\cos.\nu.\cos.\gamma);$$

Mais

$$\delta s.\cos.\lambda=\delta x, \qquad \delta s.\cos.\mu=\delta y, \qquad \delta s.\cos.\nu=\delta z:$$

donc

$$\delta p=\delta x.\cos.\alpha+\delta y.\cos.\beta+\delta z.\cos.\gamma;$$

en sorte que l'équation (A) peut s'écrire

$$S.P(\delta x.\cos.\alpha+\delta y.\cos.\beta+\delta z.\cos.\gamma)=0,$$

ou bien

$$\delta x.S.P\cos.\alpha+\delta y.S.P\cos.\beta+\delta z.S.P\cos.\gamma=0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Cela posé, supposons en premier lieu le point matériel auquel les forces P sont appliquées entièrement libre. Les trois variations $\delta x, \delta y, \delta z$ de ses coordonnées correspondantes à un déplacement possible de ce point seront entièrement arbitraires. Donc l'équation précédente ne peut exister en général qu'autant que l'on aura séparément

$$S.P\cos.\alpha=0, \qquad S.P\cos.\beta=0, \qquad S.P\cos.\gamma=0,$$

qui sont les trois équations de l'équilibre d'un point matériel libre trouvées dans le n° 22.

Supposons en second lieu le point matériel assujetti à se mouvoir sur une surface représentée par l'équation

$$F(x,y,z)=0,$$

à laquelle doivent satisfaire les trois coordonnées de ce point. On aura alors entre les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ la relation qui se déduit de l'équation précédente en la différentiant, et remplacant dx, dy et dz par δx, δy et δz, relation qui est

$$\frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y+\frac{dF}{dz}\delta z=0.$$

Or, si l'on prend dans cette équation la valeur de l'une quelconque des variations $\delta x, \delta y, \delta z$; qu'on la substitue dans l'équation (a), et que l'on égale séparément à zéro les termes affectés des deux variations restantes qui demeurent arbitraires, on retrouvera les équations qui ont été données dans le n° 25.

Admettons enfin que le point matériel soit assujetti à se mouvoir sur une courbe donnée représentée par les équations

$$f(x,y,z)=0 \qquad F(x,y,z)=0 :$$

les variations $\delta x, \delta y, \delta z$ devront alors satisfaire aux deux équations différentielles

$$\frac{df}{dx}\delta x+\frac{df}{dy}\delta y+\frac{df}{dz}\delta z=0, \qquad \frac{dF}{dx}\delta x+\frac{dF}{dy}\delta y+\frac{dF}{dz}\delta z=0.$$

Si l'on prend dans ces équations les valeurs de deux quelconques de ces variations, et que l'on substitue ces valeurs dans l'équation (a), la troisième variation disparaîtra, et l'on trouvera pour équation finale, exprimant les conditions de l'équilibre, celle qui a été donnée dans le n° 27.

III. Composition et équilibre de plusieurs forces parallèles appliquées a un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable.

31. Nous considérons ici un système de points matériels supposés assujettis les uns aux autres, de manière que leurs positions respectives ne puissent subir aucun changement, comme cela aurait lieu si ces points appartenaient à un corps solide et parfaitement rigide. Des forces quelconques, mais dont les directions sont toutes parallèles entre elles, sont appliquées à ces points. Nous admettons en général qu'une partie de ces forces tend à transporter le corps dans un sens, et l'autre partie à le transporter dans un sens opposé.

Nous avons présenté dans les n°s 11 et 14 la notion de la résultante de deux forces. La résultante de plu-

sieurs forces appliquées à un système de points matériel est la force par laquelle ce système serait sollicité de la même manière qu'il l'est par l'ensemble des forces proposées ; en sorte que si l'on appliquait au système une force égale et directement opposée à cette résultante, l'action des forces proposées serait entièrement détruite et le système se trouverait en équilibre.

Un système quelconque de forces appliquées à plusieurs points matériels étant donné, on ne peut pas toujours trouver pour ce système une seule résultante, et par conséquent on ne pourrait pas toujours faire équilibre aux forces proposées par l'application d'une force unique. La question consiste : 1° à déterminer la résultante lorsqu'elle existe, et dans tous les cas à réduire le système proposé au plus petit nombre de forces qu'il est possible ; 2° à déterminer les conditions de l'équilibre du système.

32. Soient en premier lieu deux forces parallèles P,P′, qui agissent dans le même sens. En composant ces deux forces par le principe du levier, la valeur de leur résultante sera

$$R = P + P';$$

la direction de cette résultante sera parallèle aux directions des deux forces et comprise dans le même plan; elle partagera l'intervalle de ces directions en parties réciproquement proportionnelles aux forces. Ainsi désignant par x, x', les perpendiculaires Am, Am' (*fig.* 10) abaissées d'un point quelconque A pris dans le plan des deux forces P,P′ sur leurs directions, la distance An de la direction de la résultante R au point A sera exprimée par

$$\frac{Px + P'x'}{P + P'}.$$

33. Admettons en second lieu que les deux forces parallèles données P,P′ sont dirigées en sens opposés. Soit P la plus grande de ces deux forces, et supposons que l'on applique au système, dans le plan des directions des deux forces P, P′, une troisième force P—P′ agissant en sens contraire de la force P, et placée de manière que les distances *mn*, *mm′* (*fig.* 11) soient entre elles dans le rapport de P′ à P. Il y aura équilibre en vertu du principe du levier. Donc l'action résultante des deux forces P,P′ est la force R égale et directement opposée à la force P—P′ puisque l'application de cette force P—P′ établit l'équilibre dans le système. Ainsi la résultante des forces proposées a pour valeur

$$R=P-P',$$

et la distance A*n* de sa direction au point quelconque A pris dans le plan des forces est

$$\frac{Px-P'x'}{R}.$$

34. Il est nécessaire d'examiner le cas particulier où l'on aurait P=P′. Dans ce cas, si l'on a également $x=x'$, les deux forces données sont égales et directement opposées : leur résultante est nulle, et le système est en équilibre. Mais si en même temps que les deux forces P,P′ sont égales et opposées, les directions de ces forces ne coïncident pas l'une avec l'autre, l'expression précédente $An=\frac{Px-P'x'}{R}$ de la distance de la direction de la résultante au point A devient infiniment grande.

Ainsi la résultante des forces proposées est nulle et sa direction est placée à une distance infinie des directions

de ces forces, ou plutôt elles n'ont pas de résultante. Un tel système constitue ce qu'on nomme un *couple*.

35. Considérons un couple quelconque formé de deux forces égales et parallèles P, agissant en sens contraire, mais non directement opposées, et désignons par α la distance *mn* (*fig.* 12) des directions de ces forces. L'action de ce couple sur le plan matériel auquel il est appliqué ne peut être remplacée par une force unique : cette action est d'une nature qui lui est propre, et ne pourrait être détruite que par celle d'un autre couple. Pour voir d'ailleurs en quoi consiste l'action du couple proposé, on peut supposer qu'un point quelconque A du plan matériel, auquel il est appliqué, devienne fixe. L'action simultanée des deux forces P tendra à faire tourner ce plan autour du point A, dans le sens indiqué par la flèche, et la mesure de cette action sera la différence des moments P.A*m*, P.A*n*, c'est-à-dire Pα.

On peut donc dire qu'aussitôt qu'un couple est appliqué dans un plan matériel, ce plan tend à tourner autour de l'un quelconque de ses points avec une énergie mesurée par le *moment du couple*, dont l'expression analytique est Pα. C'est en cela que consiste l'action de ce couple.

Cette action ne peut être remplacée, comme on l'a déjà dit, par une force unique qui tend, non pas à faire tourner, mais à déplacer le plan matériel dans le sens de la direction de la force. Mais si l'un des points du plan matériel devenait réellement fixe, ce plan ne pourrait plus être transporté dans l'espace ; il ne pourrait que tourner autour du point devenu fixe. Alors les actions de la force et du couple, pour opérer ou em-

pêcher ce mouvement de rotation, deviendraient tout à fait comparables. L'action du couple serait toujours mesurée par le moment $P\varpi$, dont la valeur est indépendante de la position du point fixe par rapport aux directions des forces P; et l'action d'une force Q serait mesurée par le moment Qq, en désignant par q la distance du point fixe à la direction de la force. La force fera équilibre au couple si $P\varpi=Qq$, et si le couple et la force tendent à faire tourner le plan matériel en sens opposés.

36. Soit maintenant le système de plusieurs forces parallèles P, P', P'', etc., appliquées à des points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable, et distribués arbitrairement dans l'espace. Supposons que l'on ait mené un plan perpendiculaire à la direction des forces, dans lequel on a tracé les axes rectangulaires Ax, Ay, et soient m, m', m'', etc., les points où les directions des forces proposées P, P', P'', etc., rencontrent ce plan. Nous désignerons par x et y, x' et y', x'' et y'', etc., les coordonnées des points m, m', m'', etc.

Cela posé, admettons en premier lieu que toutes les forces proposées agissent dans le même sens. On les composera facilement deux à deux par le principe du levier. La résultante des deux premières forces P, P' aura pour valeur $P+P'$. Sa direction rencontrera le plan xAy dans un point de la ligne mm' qui partagera cette ligne en parties réciproquement proportionnelles aux forces P, P'; d'où l'on conclut facilement que les coordonnées de ce point seront respectivement $\frac{Px+P'x'}{P+P'}$ et $\frac{Py+P'y'}{P+P'}$.

En composant de même la résultante des deux pre-

mières forces avec la troisième, puis la seconde résultante avec la quatrième force, et ainsi de suite, on trouvera qu'en nommant R la résultante totale, et X,Y les coordonnées du point où sa direction rencontre le plan xAy, on a

$$R=S.P, \quad \text{et} \quad X=\frac{S.Px}{R}, \quad Y=\frac{S.Py}{R};$$

équations par lesquelles la grandeur et la direction de la résultante sont déterminées.

37. Si maintenant on suppose qu'une partie des forces proposées agisse dans un sens, et l'autre partie dans le sens contraire, que l'on désigne par P_1 l'une quelconque des premières forces, et par P_2 l'une quelconque des secondes forces, on réduira d'abord le système à deux résultantes partielles Q_1 et Q_2, agissant en sens contraires, mais qui ne seront pas en général directement opposés. On aura pour les valeurs de ces résultantes partielles :

$$Q_1=S.P_1, \quad Q_2=S.P_2;$$

et les coordonnées de leurs points d'application seront

$$\text{pour la force } Q_1, \frac{S.P_1x_1}{Q_1} \text{ et } \frac{S.P_1y_1}{Q_1},$$

$$\text{pour la force } Q_2, \frac{S.P_2x_2}{Q_2} \text{ et } \frac{S.P_2y_2}{Q_2}.$$

Ces deux forces Q_1 et Q_2 se composeront ensuite (sauf le cas particulier où l'on aurait $Q_1=Q_2$) en une seule résultante R, comme on l'a vu nos 32 et 33. L'on aura

$$R=Q_1-Q_2;$$

et les coordonnées X, Y du point où la direction de cette résultante rencontrera le plan des x, y seront

$$X = \frac{S.P_1 x_1 - S.P_2 x_2}{Q_1 - Q_2}, \quad Y = \frac{S.P_1 y_1 - S.P_2 y_2}{Q_1 - Q_2}.$$

Nous aurons donc ici, comme dans le cas précédent, pour déterminer la résultante cherchée,

$$R = S.P, \quad \text{et} \quad X = \frac{S.Px}{R}, \quad Y = \frac{S.Py}{R},$$

pourvu que dans les sommes désignées par S l'on donne des signes contraires aux forces qui agissent en sens contraires. Il est visible, d'ailleurs, que l'on doit également donner des signes contraires aux coordonnées x et y, suivant qu'elles se trouvent comptées sur les parties positives, ou sur les parties négatives des axes Ax, Ay.

38. On peut remarquer d'ailleurs que les produits Px, Py donnent respectivement la mesure des actions exercées par la force P, pour faire tourner le système autour de l'axe des y et de l'axe des x, axes qui sont perpendiculaires à la direction de cette force. Ils représentent ce qu'on nomme les *moments* de la force P, pris par rapport à ces axes, en attribuant ici au terme *moment* un sens analogue à celui qui lui a été donné dans le n° 35. De même les produits RX, RY représentent les moments de la résultante R, pris par rapport aux mêmes axes. Ainsi, l'on voit par ce qui précède, que le moment de la résultante d'un système quelconque de forces parallèles est toujours égal à la somme des moments des forces composantes, ces moments étant pris

par rapport à une ligne quelconque perpendiculaire aux directions des forces.

De plus, la somme des moments des forces pris par rapport à un axe mené perpendiculairement à leurs directions par un point quelconque de la direction de la résultante, est toujours nulle.

39. A l'égard du cas particulier où les deux résultantes partielles agissant en sens contraires, qui ont été désignées par Q_1 et Q_2, seraient égales, les forces du système sont alors réduites à un couple. Il ne peut donc y avoir de résultante unique. Le plan dans lequel agit le couple est celui qui contient les directions des deux forces égales Q_1 et Q_2. La distance de ces directions est

$$\frac{1}{Q}\sqrt{(S.P_1x_1-S.P_2x_2)^2+(S.P_1y_1-S.P_2y_2)^2},$$

et par conséquent le couple tend à faire tourner le système autour d'un axe quelconque perpendiculaire à son plan avec une énergie mesurée par le moment

$$\sqrt{(S.P_1x_1-S.P_2x_2)^2+(S.P_1y_1-S.P_2)^2}=\sqrt{(S.Px)^2+(S.Py)^2}.$$

40. Enfin l'existence de l'équilibre dans le système exigeant évidemment que les deux résultantes partielles Q_1 et Q_2 soient égales et directement opposées, c'est-à-dire que la distance de ces deux directions soit nulle, les conditions de cet équilibre sont exprimées par les trois équations

$$S.P=0, \qquad S.Px=0, \qquad S.Py=0.$$

La somme des forces est nulle, aussi bien que la somme des moments des forces pris par rapport à une ligne quelconque perpendiculaire à leurs directions.

Autre méthode pour obtenir les résultats précédents.

41. On voit qu'il est indispensable, pour acquérir une connaissance complète des conditions de l'équilibre et de la composition d'un système quelconque de forces parallèles, d'avoir égard aux cas où ces forces se réduiraient à un seul couple, cas dans lequel l'équilibre est impossible, et les forces ne peuvent être composées en une résultante unique. La considération directe des couples donne les moyens de résoudre d'une manière très-simple les questions dont il s'agit. Nous exposerons en premier lieu des notions générales, d'après lesquelles on reconnaît que les couples peuvent être composés et décomposés d'après des lois analogues à celles qui conviennent aux simples forces.

Après avoir distingué, comme on l'a fait dans le n° 35, en quoi consiste l'action d'un couple, on conçoit aisément qu'à un couple donné formé de deux forces opposées P, dont les directions sont distantes de ϖ, on peut, sans que l'action exercée sur le plan matériel soit changée, substituer tout autre couple dirigé d'une manière quelconque par rapport au premier, et formé de deux forces opposées P′ dont les directions sont distantes de ϖ', pourvu que l'on ait seulement l'égalité $P'\varpi' = P\varpi$, et que les deux couples tendent à faire tourner le plan matériel dans le même sens. En effet, soient aa, bb (*fig.* 13) les directions des forces P du premier couple, et aa', bb' les directions des forces du second couple. Supposons les forces P appliquées aux points a, b de leurs directions. On pourra les supprimer en les remplaçant par les composantes P′, dirigées suivant aa' et bb', et par les com-

par rapport à une ligne quelconque perpendiculaire aux directions des forces.

De plus, la somme des moments des forces pris par rapport à un axe mené perpendiculairement à leurs directions par un point quelconque de la direction de la résultante, est toujours nulle.

39. A l'égard du cas particulier où les deux résultantes partielles agissant en sens contraires, qui ont été désignées par Q_1 et Q_2, seraient égales, les forces du système sont alors réduites à un couple. Il ne peut donc y avoir de résultante unique. Le plan dans lequel agit le couple est celui qui contient les directions des deux forces égales Q_1 et Q_2. La distance de ces directions est

$$\frac{1}{Q}\sqrt{(S.P_1x_1-S.P_2x_2)^2+(S.P_1y_1-S.P_2y_2)^2},$$

et par conséquent le couple tend à faire tourner le système autour d'un axe quelconque perpendiculaire à son plan avec une énergie mesurée par le moment

$$\sqrt{(S.P_1x_1-S.P_2x_2)^2+(S.P_1y_1-S.P_2)^2}=\sqrt{(S.Px)^2+(S.Py)^2}.$$

40. Enfin l'existence de l'équilibre dans le système exigeant évidemment que les deux résultantes partielles Q_1 et Q_2 soient égales et directement opposées, c'est-à-dire que la distance de ces deux directions soit nulle, les conditions de cet équilibre sont exprimées par les trois équations

$$S.P=0, \qquad S.Px=0, \qquad S.Py=0.$$

La somme des forces est nulle, aussi bien que la somme des moments des forces pris par rapport à une ligne quelconque perpendiculaire à leurs directions.

Autre méthode pour obtenir les résultats précédents.

41. On voit qu'il est indispensable, pour acquérir une connaissance complète des conditions de l'équilibre et de la composition d'un système quelconque de forces parallèles, d'avoir égard aux cas où ces forces se réduiraient à un seul couple, cas dans lequel l'équilibre est impossible, et les forces ne peuvent être composées en une résultante unique. La considération directe des couples donne les moyens de résoudre d'une manière très-simple les questions dont il s'agit. Nous exposerons en premier lieu des notions générales, d'après lesquelles on reconnaît que les couples peuvent être composés et décomposés d'après des lois analogues à celles qui conviennent aux simples forces.

Après avoir distingué, comme on l'a fait dans le n° 35, en quoi consiste l'action d'un couple, on conçoit aisément qu'à un couple donné formé de deux forces opposées P, dont les directions sont distantes de ϖ, on peut, sans que l'action exercée sur le plan matériel soit changée, substituer tout autre couple dirigé d'une manière quelconque par rapport au premier, et formé de deux forces opposées P′ dont les directions sont distantes de ϖ', pourvu que l'on ait seulement l'égalité $P'\varpi' = P\varpi$, et que les deux couples tendent à faire tourner le plan matériel dans le même sens. En effet, soient *aa*, *bb* (*fig.* 13) les directions des forces P du premier couple, et *aa′*, *bb′* les directions des forces du second couple. Supposons les forces P appliquées aux points *a*, *b* de leurs directions. On pourra les supprimer en les remplac[illegible] par les composantes P′, dirigées suivant *aa′* et *b*[illegible] les com-

et 41 on voit comment on peut composer plusieurs couples quelconques agissant dans des plans parallèles. Le couple résultant est placé dans un plan quelconque parallèle à ceux des couples composants, et son moment est égal à la somme des moments des couples composants, somme dans laquelle on doit donner des signes contraires aux moments des couples qui tendent à faire tourner le système en sens opposés.

45. Considérons actuellement deux couples placés dans des plans non parallèles. Quels que soient ces couples on peut les ramener : 1° à être formés tous les deux par des forces égales P ; 2° à ce que les directions de l'une des forces soient placées dans la commune intersection des plans dans lesquels ces couples sont placés. Soient AA (*fig.* 15) cette commune intersection, et AB, AC les perpendiculaires à cette ligne qui mesurent respectivement dans les plans des deux couples les distances des directions des forces P dont ils sont formés. Les moments des deux couples proposés seront exprimés respectivement par P.AB et P.AC ; l'angle BAC sera l'angle des plans de ces couples. Cela posé, achevons le parallélogramme dont AB, AC sont deux côtés, et traçons les deux diagonales AD, BC. Ces lignes étant supposées liées invariablement entre elles et au système dont les couples proposés font partie, on ne changera rien à l'état de ce système en plaçant au point D deux forces égales et parallèles aux forces P et agissant en sens contraires, et au point E quatre forces semblables qui se détruisent deux à deux. Et si l'on supprime ensuite les forces qui se font réciproquement équilibre sur les deux leviers AD, BC, il restera deux forces P agissant dans un sens

opposé aux extrémités de la diagonale AD ; c'est-à-dire un couple situé dans le plan AAD, dont le moment est P.AD. Ainsi la diagonale du parallélogramme construit sur les lignes qui représentent la direction des plans des couples composants et les moments de ces couples, représente la direction du plan du couple résultant et le moment de ce couple.

46. Cette proposition peut aussi être présentée de la manière suivante : l'action d'un couple, comme on l'a remarqué n° 35, tend à faire tourner le plan dans lequel il agit autour d'un point quelconque pris dans ce plan. Plus généralement, l'action d'un couple tend à faire tourner le système auquel il est appliqué autour d'une ligne droite quelconque perpendiculaire au plan du couple. Appelons une telle ligne l'*axe du couple* : on pourra la placer où l'on voudra dans l'espace, pourvu qu'elle reste perpendiculaire au plan du couple; et comme, par le n° 43, un couple peut être transporté dans un plan quelconque parallèle au sien sans que l'état du système soit changé, l'action d'un couple est complétement définie quand on a donné la direction de son axe et la valeur de son moment. Cela posé, on voit aisément, par le n° 45, que si l'on prend deux lignes qui représentent en direction les axes de deux couples, et en grandeur leurs moments, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux lignes représentera en direction l'axe du couple résultant, et en grandeur le moment de ce couple.

Ainsi, les couples peuvent être composés et décomposés suivant les mêmes lois que les forces; et comme on peut toujours transporter l'axe d'un couple parallèlement à lui-même dans un point quelconque de l'es-

pace, on voit que les règles exposées dans l'article II pour la composition des forces appliquées à un point matériel donnent complétement la composition des couples.

47. Cherchons maintenant les conditions de l'équilibre de plusieurs forces parallèles appliquées à un système formé de points matériels disposés d'une manière quelconque et dont les distances mutuelles sont invariables. Représentons, comme dans le n° 36, par P l'une de ces forces, et par x, y les coordonnées du point où sa direction rencontre le plan des xy mené perpendiculairement aux directions de toutes les forces. Sans rien changer à l'état du système, on peut appliquer à l'origine des coordonnées deux forces égales à P et agissant en sens contraires; en faisant la même chose pour toutes les forces, elles se trouveront remplacées par d'autres forces agissant dans le même sens qu'elles-mêmes, appliquées à l'origine, et par des couples dirigés dans des plans passant par l'axe des z, et dont l'un quelconque des moments sera représenté par $P.\sqrt{x^2+y^2}$.

L'équilibre du système exigera donc en premier lieu que les forces appliquées à l'origine se détruisent, ou que l'on ait

$$S.P=0.$$

En second lieu, il faudra qu'en composant les couples donnés par chacune des forces, le moment du couple résultant soit nul. Or, le couple donné par la force P peut être remplacé par deux autres agissant dans les plans des zx et des zy parallèlement aux directions des forces proposées, et dont les moments

sont respectivement Px, Py. Tous les couples donnés par les forces proposées peuvent donc être remplacés par deux autres couples placés dans les plans dont on vient de parler, et dont les moments sont respectivement $S.Px$, $S.Py$. L'existence de l'équilibre exigeant que le moment du couple résultant soit nul, il faudra donc que l'on ait encore les équations

$$S.Px=0, \qquad S.Py=0.$$

Les trois équations

$$S.P=0, \qquad S.Px=0, \qquad S.Py=0,$$

expriment complétement les conditions de l'équilibre du système. La première apprend que la somme des forces doit être nulle. Les deux autres indiquent que la somme des moments des forces pris par rapport à deux axes menés perpendiculairement à leur direction doit être nulle. Si cette dernière condition a lieu pour deux axes quelconques perpendiculaires à la direction des forces, et non parallèles entre eux, elle subsistera également pour tout autre axe également perpendiculaire à cette direction.

48. La résultante, si elle existe, devant être égale et directement opposée à la force qui établirait l'équilibre dans le système, on a évidemment, d'après ce qui précède, en désignant cette résultante par R, et par X, Y, les coordonnées du point où sa direction coupe le plan des xy,

$$R=S.P, \qquad RX=S.Px, \qquad RY=S.Py;$$

d'où

$$X=\frac{S.Px}{R}, \qquad Y=\frac{S.Py}{R}.$$

Ainsi, 1° la résultante est égale à la somme des forces composantes; 2° le moment de la résultante pris par rapport à un axe quelconque perpendiculaire aux directions des forces données doit être égal à la somme des moments des forces composantes pris par rapport au même axe. Cette dernière condition aura lieu pour tous les axes semblables, si elle subsiste pour deux de ces axes non parallèles entre eux.

On voit aussi que la somme des moments des forces est nulle lorsque l'on prend ces moments par rapport à un axe quelconque mené par un point de la direction de leur résultante et perpendiculairement à cette direction.

49. Si l'on a $R = 0$ sans avoir en même temps $S.Px = 0$ et $S.Py = 0$, les forces n'auront pas une résultante unique : elles se réduiront à un couple dont les couples composants situés dans les plans zx, zy ont respectivement pour moments $S.Px$ et $S.Py$.

Centre des forces parallèles.

50. Représentons-nous les forces proposées dirigées parallèlement les unes aux autres, et appliquées à divers points formant un système dont la figure est supposée invariable. En composant les deux premières forces en une seule, composant ensuite la résultante des deux premières avec la troisième force, et continuant de la même manière, on connaîtra la résultante des forces proposées si elles en ont une, et l'on déterminera en même temps la grandeur, la direction et le point d'application de cette résultante On remarquera, de plus,

que la situation de ce point d'application dépend uniquement des positions respectives des points d'application des forces proposées et des intensités de ces forces, et nullement de leurs directions; en sorte que l'on pourrait changer d'une manière quelconque ces directions pourvu qu'elles restassent toutes parallèles entre elles, en conservant d'ailleurs aux forces les mêmes points d'application et les mêmes intensités, sans que le point d'application de la résultante fût changé.

Ce point d'application de la résultante se nomme *centre des forces parallèles*. Conservons les dénominations des n°. 36 et suivants, et appelons de plus z', z'', z''', etc. les distances des points d'application des forces P, P', P'', etc. au plan des xy; et Z la distance du point d'application de la résultante au même plan. Il est visible, d'après les n°s 37 et 39, que la position de ce point est déterminée par les trois coordonnées

$$X = \frac{S.Px}{S.P}, \qquad Y = \frac{S.Py}{S.P}, \qquad Z = \frac{S.Pz}{S.P};$$

puisque le centre des forces parallèles étant toujours placé sur la direction de la résultante, les valeurs des coordonnées qui déterminent cette direction lorsqu'on suppose successivement les forces dirigées parallèlement aux trois axes des z, des y et des x, doivent appartenir au point dont il s'agit.

51. La somme des moments des forces, pris par rapport à un axe quelconque mené perpendiculairement à leurs directions par le centre des forces parallèles, est toujours nulle. Ainsi les forces ne tendent pas à faire tourner le système en aucun sens autour de ce point.

Le système serait donc en équilibre si le point dont il s'agit devenait fixe, quelles que fussent d'ailleurs les directions des forces parallèles par rapport aux parties de l'espace.

52. Si le système des forces se réduisait à un couple, le centre des forces parallèles n'existerait plus.

53. Si toutes les forces désignées par P étaient égales entre elles, les expressions du n° 50 deviendraient

$$X=\frac{S.x}{n}, \qquad Y=\frac{S.y}{n}, \qquad Z=\frac{S.z}{n},$$

en appelant n le nombre des forces. Le point auquel appartiennent les coordonnées X, Y, Z ne dépend alors que des positions respectives des points d'application. On le nomme *centre des moyennes distances*, et la détermination de ce point devient une recherche de pure géométrie.

IV. Composition et équilibre de plusieurs forces dirigées arbitrairement et appliquées a un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable.

54. Considérons un système formé de plusieurs points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable, auxquels sont appliquées des forces dirigées d'une manière quelconque. Soient, P la valeur de l'une de ces forces exprimée en unité de poids ; x, y, z les trois coordonnées rectangulaires de son point d'application ; α, β, γ les angles que sa direction forme respectivement avec les axes des x, des y et des z. La question consiste: 1° à composer toutes les forces P en une résultante unique, si cela est possible, ou du moins à réduire le

système au plus petit nombre de forces qu'on le pourra ; 2° à exprimer les conditions nécessaires pour que les forces dont il s'agit se fassent mutuellement équilibre.

Supposons, en premier lieu, le système des forces proposées en équilibre, et proposons-nous d'exprimer les conditions de cet équilibre. Admettons que chacune des forces P ait été décomposée en trois forces $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$, respectivement parallèles aux trois axes des x, des y et des z. L'équilibre du système ne sera pas altéré si l'on applique à l'origine des coordonnées dans des directions parallèles aux forces $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$, deux forces respectivement égales à chacune de celles-ci et opposées l'une à l'autre. On aura alors, au lieu du système proposé, 1° un système de forces appliquées à l'origine des coordonnées et dirigées dans le sens des trois axes ; 2° un système de couples formés par des forces dirigées parallèlement à ces axes.

On voit en premier lieu que l'équilibre de ce système exige que les forces appliquées à l'origine se détruisent réciproquement, ou que leur résultante soit nulle : ce qui donne les trois équations

$$S.P\cos.\alpha=0, \qquad S.P\cos.\beta=0, \qquad S.P\cos.\gamma=0.$$

Il faudra en second lieu que tous les couples produits par chacune des forces $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$ se détruisent entre eux, ou que le moment du couple résultant soit nul. Or le couple produit par la force $P\cos.\alpha$, dont le moment est $P\cos.\alpha.\sqrt{y^2+z^2}$, peut être remplacé par deux autres couples agissant dans les plans des xy et

des yz, dont les moments seront $Py\cos.\alpha$, et $Pz\cos.\alpha$. Le couple produit par la force $P\cos.\beta$, dont le moment est $P\cos.\beta\sqrt{x^2+z^2}$, peut être remplacé par deux autres couples agissant dans les plans des xy et des yz, dont les moments seront $Px\cos.\beta$ et $Pz\cos.\beta$. Enfin le couple produit par la force $P\cos.\gamma$, dont le moment est $P\cos.\gamma.\sqrt{x^2+y^2}$, peut être remplacé par deux autres couples agissant dans les plans des xz et des yz, dont les moments seront $Px\cos.\gamma$ et $Py\cos.\gamma$. Au moyen de cette décomposition, tous les couples seront remplacés par d'autres qui agissent dans les trois plans coordonnés. Ceux qui sont dirigés dans le plan des xy donneront en les composant un couple résultant partiel dont le moment sera $S.P(y\cos.\alpha-x\cos.\beta)$; ceux qui sont dirigés dans le plan des xz en donneront un dont le moment sera $S.P(x\cos.\gamma-z\cos.\alpha)$; et ceux qui sont dirigés dans le plan des yz en donneront un dont le moment sera $S.P(z\cos.\beta-y\cos.\gamma)$. Les expressions précédentes sont écrites en supposant que l'on prenne positivement les moments des couples qui tendent à faire tourner le système dans le sens de x vers z, de z vers y, de y vers x, et négativement les moments des couples qui tendent à le faire tourner dans le sens opposé. Les trois couples se composeront en un seul, dont le moment ne peut être nul, à moins que chacun des moments des couples composants ne soit nul, ce qui donne les trois équations

$$S.P(y\cos.\alpha-x\cos.\beta)=0,\quad S.P(x\cos.\gamma-z\cos.\alpha)=0$$
$$S.P(z\cos.\beta-y\cos.\gamma)=0,$$

lesquelles, réunies aux précédentes, expriment complétement les conditions de l'équilibre du système.

55. Ces trois dernières équations peuvent être écrites d'une manière plus simple. Désignons respectivement par p, q, r les plus courtes distances de la direction de la force P aux axes des x, des y et des z. Soit mp (*fig.* 16) la projection de la direction de la force P sur le plan vertical des yz : la plus courte distance p de cette direction à l'axe des x se projettera sur le même plan en Ap perpendiculaire à mp. On reconnaîtra facilement d'ailleurs que la direction de la force P formant avec le plan des yz un angle complément de α, l'angle compris entre sa projection mp et l'axe des y a pour cosinus $\frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha}$; et que l'angle compris entre cette même projection et l'axe des z a pour cosinus $\frac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha}$. Donc on aura

$$p = z.\frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha} - y.\frac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha}.$$

On trouvera de la même manière

$$q = x.\frac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha} - z.\frac{\cos.\alpha}{\sin.\beta}, \text{ et } r = y.\frac{\cos.\alpha}{\sin.\gamma} - x.\frac{\cos.\beta}{\sin.\gamma}.$$

Les trois équations dont il s'agit peuvent donc se changer en

$$S.Pp\sin.\alpha = 0, \qquad S.Pq\sin.\beta = 0, \qquad S.Pr\sin.\gamma = 0.$$

Les trois équations

$$S.P\cos.\alpha = 0, \quad S.P\cos.\beta = 0, \quad S.P\cos.\gamma = 0,$$

se rapportent à l'*équilibre de translation*. Elles expriment que la somme des forces proposées estimées parallèlement aux trois axes est nulle; et par conséquent que la somme de ces forces estimées parallèlement à

une ligne quelconque est également nulle. Les trois autres équations se rapportent à l'*équilibre de rotation*. Elles expriment que la somme des moments des forces pris par rapport à chacun des trois axes, moments qui mesurent l'énergie avec laquelle les forces tendent à faire tourner le système autour de ces axes est nulle, et l'on en conclut que la somme des moments des forces pris par rapport à une ligne quelconque sera également nulle.

56. Admettons en second lieu que le système des forces proposées ne soit pas en équilibre. Elles peuvent alors se réduire à une force unique qui en est la résultante, ou une telle réduction est impossible. Si elles se réduisent à une force unique, on établira l'équilibre dans le système en appliquant une force égale et directement opposée à cette résultante. Donc en désignant celle-ci par R, par a,b,c les angles que sa direction forme avec les axes, et par X, Y, Z les coordonnées de son point d'application, on aura les six équations

$$\begin{gathered}
S.P\cos.\alpha - R\cos.a = 0,\\
S.P\cos.\beta - R\cos.b = 0,\\
S.P\cos.\gamma - R\cos.c = 0,\\
S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - R(Y\cos.a - X\cos.b) = 0,\\
S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) - R(X\cos.c - Y\cos.a) = 0,\\
S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) - R(Z\cos.b - Y\cos.c) = 0;
\end{gathered}$$

dont les trois premières donnent

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\cos.\beta)^2 + (S.P\cos.\gamma)^2}$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \quad \cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R}, \quad \cos.c = \frac{S.P\cos.\gamma}{R};$$

et les trois autres

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - Y.S.P\cos.\alpha + X.S.P\cos.\beta = 0$$
$$S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) - X.S.P\cos.\gamma + Z.S.P\cos.\alpha = 0$$
$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) - Z.S.P\cos.\beta + Y.S.P\cos.\gamma = 0.$$

Ces dernières équations ne peuvent déterminer les coordonnées X,Y,Z. En les éliminant on trouve l'équation de condition

$$\begin{aligned} 0 = \quad & S.P\cos.\alpha.S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) \\ + \; & S.P\cos.\beta\; S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) \\ + \; & S.P\cos.\gamma.S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta), \end{aligned}$$

qui doit être vérifiée pour que les trois équations dont il s'agit puissent subsister ensemble, et appartenir aux projections d'une même ligne droite qui sera la direction de la résultante des forces du système.

57. Si l'équation de condition précédente n'est point vérifiée, les forces proposées ne peuvent se réduire à une résultante unique. Mais elles se trouvent réduites par le n° 54 à une force appliquée à l'origine, qui est la résultante des forces $S.P\cos.\alpha$, $S.P\cos.\beta$, $S.P\cos.\gamma$ dirigées suivant les axes des x, des y et des z, et à un couple unique qui est le couple résultant des trois couples agissant dans les plans des xy, des xz et des yz, dont les moments sont respectivement

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta), \quad S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha),$$
$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma).$$

Or on peut composer la force appliquée à l'origine avec une des forces du couple : ainsi le système peut toujours être réduit à deux forces seulement.

58. La considération de la force et du couple dont

il s'agit peut d'ailleurs faire reconnaître immédiatement la condition analytique à laquelle il faut satisfaire pour que les forces proposées se réduisent à une résultante unique. En effet cette réduction aura lieu si la direction de la force est comprise dans le plan du couple, ou si la direction de la force est perpendiculaire à l'axe du couple, condition qui est exprimée par l'équation obtenue ci-dessus.

59. On peut remarquer aussi que les trois dernières équations posées n° 56 peuvent s'écrire

$$S.P\cos.\alpha(y-Y)-S.P\cos.\beta(x-X)=0\,,$$
$$S.P\cos.\beta(x-X)-S.P\cos.\alpha(z-Z)=0\,,$$
$$S.P\cos.\gamma(z-Z)-S.P\cos.\gamma(y-Y)=0\,;$$

elles expriment visiblement que la somme des moments des forces du système pris par rapport à trois axes parallèles aux axes des z, des y et des x, menés par le point dont les coordonnées sont X, Y, Z est nulle. Or cette propriété doit subsister pour un point quelconque de la direction de la résultante, si cette résultante existe. Donc il y aura une résultante unique si ces trois équations peuvent être vérifiées par les mêmes valeurs des trois coordonnées X, Y, Z.

Cas où toutes les forces appliquées au système sont dirigées dans un même plan.

60. En prenant pour plan des xy le plan des directions des forces, il est visible, d'après ce qui précède, que les conditions de l'équilibre seront données par les seules équations

$$S.P\cos.\alpha=0,\qquad S.P\cos.\beta=0,$$

exprimant que la résultante des forces est nulle ; et

$$S.P\,(y\cos.\alpha - x\cos.\beta = 0,$$

exprimant que le moment du couple résultant est également nul. Cette dernière équation peut être remplacée par la suivante :

$$S.Pp = 0,$$

où p désigne la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées sur la direction de la force P, et dans laquelle on doit donner aux moments Pp des signes différents, suivant le sens dans lequel les forces P tendent à faire tourner le système autour de l'origine des coordonnées.

61. On reconnaît également que l'on a, pour la détermination de la résultante, les conditions

$$S.P\cos.\alpha - R\cos.a = 0\,, \quad S.P\cos.\beta - R\cos.b = 0,$$

d'où

$$R = \sqrt{(S.P\cos.\alpha)^2 + (S.P\cos.\beta)^2},$$

$$\cos.a = \frac{S.P\cos.\alpha}{R}, \quad \cos.b = \frac{S.P\cos.\beta}{R}$$

et

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) - Y.S.P\cos.a + X.S.P\cos.\beta = 0.$$

Des forces quelconques agissant dans un plan se réduisent toujours à une force unique déterminée par ces équations, à l'exception du seul cas où l'on aurait $SP\cos.\alpha = 0$ et $SP\cos.\beta = 0$, ce qui donnerait $R = 0$. Les forces se réduisent alors à un couple dont le moment est $S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta)$, ou $S.Pp$.

Conditions de l'équilibre lorsqu'il existe un point fixe autour duquel le système peut tourner librement dans tous les sens.

62. Admettons que l'origine des coordonnées soit placée dans le point fixe, et supposons comme dans le n° 54 que chacune des forces $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$ ait été remplacée par une force égale appliquée à l'origine et par un couple. Les forces appliquées à l'origine étant ainsi détruites par la résistance du point fixe, le système ne pourrait plus se mouvoir que par l'effet de l'action des couples. L'équilibre subsistera donc si le moment du couple résultant est nul, c'est-à-dire si l'on a les trois équations

$$S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) = 0, \qquad S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) = 0,$$
$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) = 0$$

Ainsi, un système dans lequel il existe un point fixe est en équilibre lorsque la somme des moments des forces pris par rapport à trois axes quelconques passant par le point fixe est nulle.

63. L'effort exercé sur le point fixe est la force résultante des trois forces

$$S.P\cos.\alpha, \qquad S.P\cos.\beta, \qquad S.P\cos.\gamma$$

qui sont dirigées respectivement dans le sens de l'axe des x, de l'axe des y et de l'axe des z.

Conditions de l'équilibre lorsqu'il existe dans le système deux points fixes.

64. Nous admettrons, pour plus de simplicité, que l'origine des coordonnées est placée dans l'un des

points fixes, et que l'axe des x est la ligne droite qui joint ces deux points. Leur distance sera représentée par a.

Si le système est en équilibre, ou ces forces se détruisent entre elles, cas dans lequel leurs valeurs vérifient les six équations du n° 54 ; ou ces forces sont détruites par la résistance des points fixes, et dans ce dernier cas les six équations dont il s'agit doivent être vérifiées lorsque l'on comprend dans le système des forces égales et directement opposées aux efforts exercés sur les points fixes. D'après cela, si nous désignons par E,F,G les trois composantes dans le sens de l'axe des x, de l'axe des y et de l'axe des z de l'effort exercé sur le premier point fixe placé dans l'origine des coordonnées ; et par E′,F′,G′ les trois composantes de l'effort exercé sur le second point fixe placé dans l'axe des x à la distance a du premier ; on aura évidemment

$$\begin{array}{ll} S.P\cos.\alpha - E - E' = 0 & \text{et} \quad S.P(y\cos.\alpha - x\cos.\beta) + F'a = 0 \\ S.P\cos.\beta - F - F' = 0 & \quad\quad\quad S.P(x\cos.\gamma - z\cos.\alpha) - G'a = 0 \\ S.P\cos.\gamma - G - G' = 0 & \quad\quad\quad S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) \quad = 0. \end{array}$$

Quelles que puissent être les forces proposées, on pourra toujours trouver des valeurs de E,F,G, E′,F′,G′, qui satisfassent aux cinq premières équations. La seule condition nécessaire pour que l'équilibre subsiste est donc exprimée ici par l'équation

$$S.P(z\cos.\beta - y\cos.\gamma) = 0,$$

qui doit être vérifiée par les valeurs des forces ; d'où l'on conclut que le moment de rotation des forces pris par rapport à l'axe passant par les deux points fixes doit avoir une valeur nulle.

65. Quand il existe deux points fixes, le système ne peut plus que tourner autour de la ligne droite passant par ces deux points : l'équation précédente exprime que les forces ne tendent pas à produire un tel mouvement. Mais si l'on ne supposait pas que les deux points dont il s'agit fussent entièrement fixes, mais seulement qu'ils ne peuvent sortir d'une même ligne droite donnée, il faudrait alors attribuer une valeur nulle aux composantes désignées ci-dessus par E et E'. Ainsi, l'équilibre du système exigerait, outre l'équation précédente, l'équation

$$S.P\cos.\alpha=0,$$

qui exprime que la somme des composantes des forces dans le sens de l'axe de rotation a une valeur nulle.

66. La première équation du n° 64 donne

$$E+E'=S.P\cos.\alpha;$$

et les quatre équations suivantes,

$$F'=-\frac{S.P(y\cos.\alpha-x\cos.\beta)}{a},\quad F=\frac{S.P[y\cos.\beta-(x-a)\cos.\beta]}{a}$$

$$G'=\frac{S.P(x\cos.\gamma-z\cos.\alpha)}{a}\quad G=-\frac{S.P[(x-a)\cos.\gamma-z\cos.\alpha]}{a}.$$

Ainsi, les valeurs distinctes des deux efforts E,E' dirigés dans le sens de la ligne qui joint les deux points fixes ne peuvent être déterminées : on connaît seulement la somme de ces efforts. Quant aux efforts exercés perpendiculairement à cette ligne, ils sont entièrement déterminés par les équations précédentes pour chacun des deux points fixes.

67. Lorsque toutes les forces du système sont diri-

gées dans des plans perpendiculaires à la ligne qui joint les deux points fixes, les termes contenant cos.α sont nuls, et l'on a

$$E+E'=0, \quad F'=\frac{S.Px\cos.\beta}{a}, \quad F=\frac{S.P(a-x)\cos.\beta}{a}$$

$$G'=\frac{S.Px\cos.\gamma}{a} \quad G=\frac{S.P(a-x)\cos.\gamma}{a}.$$

Il n'existe plus d'effort dans le sens de la ligne qui joint les deux points fixes; et les efforts dirigés perpendiculairement à cette ligne sont les mêmes qui auraient eu lieu si les forces du système, sans qu'on les sortît des plans où elles sont situées, étaient transportées parallèlement à elles-mêmes et appliquées à la ligne dont il s'agit.

68. S'il existait dans le système trois ou un plus grand nombre de points fixes, l'équilibre aurait toujours lieu, quelles que fussent les forces appliquées à ce système. Quant aux valeurs des efforts exercés sur les points fixes, elles sont alors en général indéterminées. Néanmoins, comme les efforts dont il s'agit, pris en sens contraires et réunis aux forces du système, doivent toujours vérifier les six équations de l'équilibre du n° 54, cette condition établit dans chaque cas particulier des limites entre lesquelles ces valeurs sont nécessairement comprises.

L'indétermination dont on vient de parler est un résultat nécessaire de l'hypothèse d'une rigidité parfaite dans les parties constituantes du système, ou de l'invariabilité absolue de la figure formée par les points matériels auxquels les forces sont appliquées. Cette hypo-

thèse est une abstraction purement mathématique qu'il est nécessaire de faire pour présenter avec simplicité les théories de l'équilibre, mais qui ne s'accorde pas exactement avec les effets naturels. Dans la réalité, la figure naturelle d'un corps s'altère toujours un peu lorsqu'il est soumis à l'action de diverses forces ; et les conditions de ces changements qui dépendent de la nature physique du corps, jointes aux lois générales de l'équilibre, donnent toujours tout ce qui est nécessaire pour déterminer complétement l'état du système, état dont il est évident qu'aucun élément ne peut jamais demeurer indéterminé et arbitraire.

Conditions de l'équilibre dans le cas où un corps solide soumis à l'action de diverses forces s'appuie par un ou plusieurs points contre des surfaces fixes données.

69. Supposons d'abord que le corps solide s'appuie par un seul point contre une surface. Ce point ne pourra se mouvoir dans le sens de la normale à la surface; mais il pourra se mouvoir dans une direction quelconque perpendiculaire à cette normale; et de plus, le corps pourra tourner autour d'une ligne quelconque passant par le point dont il s'agit. D'où l'on conclut que l'équilibre exige : 1° que les forces appliquées au corps solide puissent se réduire à une résultante unique; 2° que la direction de cette résultante coïncide avec la direction de la normale à la surface menée au point d'appui. Il est visible d'ailleurs que le sens de l'action de la résultante doit être tel qu'elle tende à appuyer le corps contre la surface, et non à l'en écarter.

70. Si le corps solide s'appuie par deux points contre une surface, l'équilibre subsistera si l'on peut faire coïncider les directions des deux forces auxquelles les forces proposées peuvent toujours être réduites, avec les deux normales à la surface menées aux points d'appui. Et si les forces proposées se réduisent à une résultante unique, il sera nécessaire que ces deux normales soient situées dans un même plan, qui contienne également la direction de la résultante, et se rencontrent en un point qui appartient à cette direction. Il faut d'ailleurs, comme dans le cas précédent, que les forces tendent à appuyer le corps contre la surface, et non à l'en écarter.

71. Si le corps solide s'appuie par trois points contre une surface, on doit considérer que la résistance de la surface équivaut à trois forces dirigées suivant les normales menées aux points d'appui, et auxquelles on peut attribuer des valeurs quelconques en fixant convenablement le sens de leur action. Si l'on peut former avec trois semblables forces un système qui détruise complétement le système des forces proposées, l'équilibre demandé subsistera. Par conséquent, lorsque les forces proposées se réduisent à une résultante unique, l'équilibre ne peut subsister à moins que les trois normales à la surface ne se coupent en un même point situé sur la direction de cette résultante, ou à moins que ces trois normales ne soient parallèles entre elles et à la direction de la résultante, ces quatre lignes étant dirigées dans un même plan, et la direction de la résultante étant comprise dans l'intervalle des normales dont il s'agit.

V. Centres de gravité.

72. Dans les applications de la mécanique aux travaux des arts, la gravité ou la force qui attire tous les corps vers le centre de la terre, est regardée comme agissant suivant des directions parallèles à la verticale, c'est-à-dire à la direction du fil à plomb, ou de la perpendiculaire à la surface des eaux. De plus, cette force est supposée constante, c'est-à-dire exerçant toujours sur chaque partie des corps une action dont l'intensité est toujours la même. En effet, les dimensions des corps qui sont l'objet de nos calculs, ou les espaces qu'ils parcourent dans leurs mouvements, sont en général trop petits pour qu'il soit nécessaire d'avoir égard au changement de direction de la gravité, ou aux variations que subit (comme on le verra dans la suite) l'intensité de cette force. Ainsi les notions présentées dans l'article précédent s'appliquent immédiatement aux actions exercées par la gravité sur divers corps, ou sur les parties d'un même corps.

73. Considérons en premier lieu un système formé de plusieurs points matériels pesants, assujettis entre eux d'une manière invariable. Les poids respectifs de ces points matériels sont autant de forces verticales, et par conséquent parallèles entre elles, par lesquelles ils sont sollicités. Si nous désignons par P l'un quelconque de ces poids, et par x, y, z les distances du point matériel à trois plans rectangulaires, les distances X, Y, Z du centre des forces parallèles aux mêmes plans seront exprimées d'après le n° 50 par les formules

$$X=\frac{S.Px}{S.P}, \qquad Y=\frac{S.Py}{S.P}, \qquad Z=\frac{S.Pz}{S.P}.$$

Quand il s'agit de poids, le centre des forces parallèles prend le nom de *centre de gravité*. Ainsi les expressions précédentes présentent les coordonnées du centre de gravité de plusieurs points matériels pesants, exprimées en fonction des coordonnées de ces points matériels, et de leurs poids respectifs.

74. La position du centre de gravité relativement aux parties du système demeure la même, quelle que soit la situation du système dans l'espace. Ce système serait en équilibre si le centre de gravité devenait fixe. Les poids de tous les points matériels sont donc soutenus lorsque l'on soutient le centre de gravité, comme si toutes les parties du système étaient concentrées dans ce point.

75. Si au lieu de considérer un système de points matériels pesants on considère un système formé de plusieurs corps solides qui ont de l'étendue, on pourra lui appliquer les formules du n° 73. Les coordonnées x, y, z appartiendront respectivement aux centres de gravité de chacun de ces corps, et X,Y,Z seront les coordonnées de leur centre de gravité commun.

76. Les mêmes principes s'appliquent à la recherche du centre de gravité commun des parties d'un même corps. En général un corps n'est pas homogène, en sorte que ses parties n'ont pas toutes la même densité, ou n'ont pas toutes le même poids sous le même volume. Supposons les positions des divers points du corps rapportées à trois plans rectangulaires au moyen des coor-

données x, y, z. Nous désignerons par ϖ le poids que les parties du corps présenteraient sous l'unité de volume dans le point dont les coordonnées sont x, y, z, et par P le poids total du corps. Le poids de l'élément du volume $dx.dy.dz$ qui est placé dans ce point sera donc exprimé par $\varpi dx.dy.dz$; et les moments de ce poids pris par rapport aux trois axes le seront respectivement par $\varpi x.dx.dy.dz$, $\varpi y.dx.dy.dz$, $\varpi z.dx.dy.dz$. Ainsi, nommant P le poids total du corps, et X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité, nous avons, conformément aux principes exposés dans les articles XXVIII et XXIX des *Leçons d'Analyse*,

$$P = \int dx \int dy \int dz.\varpi,$$

$$X = \frac{\int dx.x \int dy \int dz.\varpi}{P}$$

$$Y = \frac{\int dx \int dy.y \int dz.\varpi}{P}$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy \int dz.\varpi z}{P}.$$

La quantité ϖ doit être donnée et exprimée en fonction des coordonnées x, y, z : on substituera sa valeur dans les formules précédentes. La figure de la surface qui termine le corps doit également être donnée par une équation entre x, y, z. Les limites des intégrales commencent et finissent aux valeurs de chaque coordonnée qui appartiennent aux limites du corps. Ainsi, 1° l'on prendra la première intégrale par rapport à z entre les valeurs de z données en x et y par l'équation de la surface qui appartiennent aux deux nappes opposées entre lesquelles le corps est compris ; 2° la seconde inté-

grale, par rapport à y, sera prise entre la plus petite et la plus grande valeur de y que donnera l'équation de la surface quand on y fera varier z seule, valeurs qui seront exprimées en x; la troisième intégrale, par rapport à x, sera prise entre la plus petite et la plus grande valeur de x qui satisfassent à l'équation de la surface.

Lorsque les corps ne sont point enveloppés par une surface dont la nature puisse être définie par une seule équation, on décompose alors les intégrales définies en plusieurs parties dont on calcule séparément les valeurs en se conformant à ce qui vient d'être indiqué.

77. Si la densité est uniforme, ϖ devient un facteur constant qui disparaît dans les expressions de X,Y,Z. Ces expressions se réduisent alors à

$$X = \frac{\int dx.x \int dy.\int dz}{A}, \quad Y = \frac{\int dx \int dy.y \int dz}{A},$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy \int dz.z}{A},$$

A désignant le volume du corps.

78. On est quelquefois dans le cas de considérer un corps dont une dimension est fort petite; c'est ce qu'on appelle chercher le centre de gravité d'une surface. Supposons cette surface donnée par une équation entre l'ordonnée z et les abscisses xy. Soit ϖ la valeur du poids de la surface dans le point dont les abscisses sont x, y, pour une étendue égale à l'unité de surface. Le poids de l'élément de l'aire de la surface placé au même point sera exprimé par

$$\varpi . dx dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}.$$

Ainsi, nommant comme ci-dessus P le poids total du corps, et X, Y, Z les coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$P = \int dx \int dy . \varpi \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1};$$

et

$$X = \frac{\int dx . x \int dy . \varpi \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{P},$$

$$Y = \frac{\int dx \int dy . \varpi y \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1}}{P},$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy . \varpi z \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right) + 1}}{P}.$$

On doit avant les intégrations substituer dans les formules pour z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ leurs valeurs en x, y, données par l'équation connue de la surface. Les limites des intégrales sont déterminées par les valeurs des cordonnées x, y qui correspondent aux limites de la surface. On doit également substituer pour ϖ sa valeur en fonction de x, y.

79. Si la densité est uniforme, on a simplement

$$X = \frac{\int dx.x \int dy \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 + 1}}{A},$$

$$Y = \frac{\int dx \int dy.y \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1}}{A},$$

$$Z = \frac{\int dx \int dy.z \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right) + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1}}{A};$$

A désignant l'aire de la surface.

80. Enfin l'on peut considérer un corps dont deux dimensions seraient très-petites, ce qu'on appelle chercher le centre de gravité d'une ligne. Nous supposerons, en général, cette ligne donnée par deux équations, l'une entre y et x; l'autre entre z et x; et nous désignerons par ϖ la valeur du poids de la ligne, pour une unité de longueur, qui convient au point dont les coordonnées sont x, y, z. Le poids de l'élément de la ligne placé à ce point sera

$$\varpi dx.\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Par conséquent P représentant le poids total de la ligne, et X,Y,Z les coordonnées du centre de gravité, nous aurons

$$P = \int dx.\varpi \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

$$X = \frac{\int dx.\varpi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

$$Y = \frac{\int dx.\varpi y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P},$$

$$Z = \frac{\int dx.\varpi z \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{P}.$$

La valeur de ϖ, qui doit être donnée en fonction de x, et celles de y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, qui le sont également, doivent être substituées dans ces formules. Les intégrales sont prises entre les valeurs de x, qui répondent aux points extrêmes de la ligne proposée.

81. Si les poids des parties égales de cette ligne sont partout les mêmes, les expressions de X, Y, Z deviennent

$$X = \frac{\int dx.x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

$$Y = \frac{\int dx.y \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A},$$

$$Z = \frac{\int dx.z \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{A};$$

A désignant ici la longueur de la ligne.

82. Il convient quelquefois, pour la facilité des calculs, de rapporter les points des corps à d'autres coordonnées, mieux appropriées à leur figure que ne le sont les coordonnées rectangulaires. On ne s'arrêtera pas à

détailler les formules générales que l'on peut obtenir de cette manière et qui sont toujours déduites des mêmes principes. Quelquefois, aussi, la figure particulière des corps indique sur-le-champ un mode de décomposition en éléments différentiels par le moyen duquel une seule opération suffit pour déterminer le centre de gravité. On reconnaît immédiatement que si un corps homogène peut être partagé en parties symétriques par un plan, ou plus généralement si un corps quelconque peut être partagé par un plan vertical en deux parties dont les poids se feraient réciproquement équilibre autour d'un axe horizontal placé dans ce plan, les plans dont il s'agit contiendront nécessairement le centre de gravité du corps. Cette seule considération suffit quelquefois pour faire connaître ce point. Souvent elle en réduit la recherche à celle de deux ou d'une seule coordonnée.

83. Soit par exemple un solide de révolution décrit autour de l'axe des x par une courbe dont l'ordonnée y est donnée en fonction de l'abscisse x. Le centre de gravité est évidemment placé dans l'axe des x. De plus, on peut partager immédiatement le corps en éléments différentiels compris entre des plans perpendiculaires à cet axe. L'élément différentiel du volume sera $\pi y^2 dx$; et par conséquent le corps étant supposé homogène, l'abscisse X du centre de gravité du volume a pour expression

$$X = \frac{\int xy^2 dx}{\int y^2 dx}.$$

84. L'élément différentiel de la surface du même solide est

$$2\pi y dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2};$$

et par conséquent l'abscisse X du centre de gravité de la surface est

$$X = \frac{\int xydx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\int ydx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}.$$

On doit substituer dans ces formules pour y et $\frac{dy}{dx}$ leurs valeurs en x données par l'équation de la courbe génératrice. Les limites des intégrales répondent aux valeurs de x entre lesquelles sont comprises les portions du solide que l'on considère.

Un calcul semblable pourrait servir à déterminer le centre de gravité du volume ou de la surface d'un segment formé dans un ellipsoïde par un plan perpendiculaire à l'un des axes principaux, puisque le centre de gravité dont il s'agit serait nécessairement placé dans cet axe.

85. Nous appliquerons les notions précédentes aux cas les plus simples.

Le centre de gravité d'une ligne droite supposée chargée de poids également répartis est évidemment au milieu de sa longueur.

Considérons un arc de cercle AM (*fig.* 17). Soit m un point quelconque de cet arc, ω l'angle compris entre le diamètre AB et le rayon Cm mené à ce point, r le rayon de l'arc. L'élément de la longueur de l'arc placé en m est $rd\omega$, et la distance Cp est $r\cos.\omega$. Soit de plus Ω l'angle

formé avec AB par le rayon CM mené à l'extrémité de l'arc. La distance X du centre de gravité de cet arc au centre C sera

$$X=\frac{\int_0^\Omega rd\omega.r\cos.\omega}{r\Omega},\quad \text{ou}\quad X=r\frac{\sin.\Omega}{\Omega}.$$

Ainsi le poids du sinus de l'arc AM placé à l'extrémité opposée B du diamètre horizontal AB ferait équilibre autour du centre C au poids de cet arc.

La valeur précédente de X donne également la position du centre de gravité de l'arc MAN.

86. Soit encore un arc de cycloïde compté du sommet de la courbe. On a trouvé, dans le n° 325 des *Leçons d'analyse*, pour l'expression de la longueur de cet arc

$$s=2\sqrt{2Ry},\quad \text{d'où}\quad ds=dy\sqrt{\frac{2R}{y}},$$

l'ordonnée y étant également comptée du sommet de la courbe. Ainsi, nous aurons pour les coordonnées du centre de gravité de cet arc, en les rapportant au même point

$$X=\frac{\int_0^y xdy\sqrt{\frac{2R}{y}}}{2\sqrt{2Ry}},\quad \text{ou}\quad X=\frac{\int_0^y \frac{xdy}{\sqrt{y}}}{2\sqrt{y}}$$

$$Y=\frac{\int_0^y ydy\sqrt{\frac{2R}{y}}}{2\sqrt{2Ry}},\quad \text{ou}\quad Y=\frac{\int_0^y dy\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}.$$

Comme on a

$$\int\frac{xdy}{\sqrt{y}}=2x\sqrt{y}-2\int dx.\sqrt{y};$$

et (en écrivant $2R-y$ au lieu de y dans l'équation différentielle de la cycloïde qui est donnée n° 178 des *Leçons d'analyse*) $dx=dy\,\frac{\sqrt{2R-y}}{\sqrt{y}}$; il vient

$$\int\frac{xdy}{\sqrt{y}}=2x\sqrt{y}-2\int dy\sqrt{2R-y}$$
$$=2\left\{x\sqrt{y}+\frac{2}{3}(2R-y)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Donc

$$X=x-\frac{2}{3}\left[(2R)^{\frac{3}{2}}-(2R-y)^{\frac{3}{2}}\right],\qquad Y=\frac{1}{3}y.$$

La distance du centre de gravité de l'arc au sommet de la courbe est le tiers de l'ordonnée du point extrême de cet arc.

87. Proposons-nous de trouver le centre de gravité de l'aire d'un triangle. Soit pris pour plus de simplicité l'origine des coordonnées au sommet, en plaçant les axes de manière que celui des y soit parallèle à la base. Supposons les directions des côtés adjacents données par les équations $y=px$, $y=qx$ et représentons par a la hauteur. Les formules du n° 79 se réduisent dans le cas d'une aire plane à

$$X=\frac{\int dx.x\int dx}{A},\qquad Y=\frac{\int dx\int dy.y}{A};$$

et, puisque les intégrales relatives à y doivent être prises depuis $y=px$ jusqu'à $y=qx$, ces formules donnent

$$X=\frac{\int_0^x dx.x^2(q-p)}{\frac{1}{2}a^2(q-p)},\qquad Y=\frac{\int_0^a dx.\frac{1}{2}x^2(q^2-p^2)}{\frac{1}{2}a^2(q-p)};$$

c'est-à-dire

$$X=\frac{2}{3}a, \qquad Y=\frac{1}{3}a(q+p).$$

Le centre de gravité cherché est placé aux deux tiers à compter du sommet de la ligne droite menée de ce point au milieu de la base.

On parvient à ce résultat d'une manière plus simple en observant que le triangle proposé peut être décomposé par des lignes parallèles à la base en éléments différentiels dont les centres de gravité se trouvent sur la droite qui joint son milieu au sommet opposé. L'aire de l'élément placé à la distance x de l'origine est $dx.x(q-p)$; d'où l'on conclut

$$X=\frac{\int_0^x dx.\,x^2(q-p)}{\frac{1}{2}a^2(q-p)}=\frac{2}{3}a.$$

Le centre de gravité d'une figure triangulaire étant connu, on détermine aisément d'après le n° 75 le centre de gravité d'une figure quelconque formée par des lignes droites.

88. Soit maintenant le segment circulaire MAN (*fig.* 17). Il suffira de considérer sa moitié MAP, et de chercher la distance du centre de gravité de cette moitié au centre C par la seule formule

$$X=\frac{\int dx.xy}{A}.$$

En conservant les dénominations du n° 85, et comptant les x du point C, nous avons ici

$$x=r.\cos.\omega\,, \quad dx=-r\sin.\omega.d\omega\,, \quad y=r\sin.\omega.$$

La formule précédente donne donc ici

$$X=\frac{\int_0^{\Omega} r^3 \sin.^2\omega.\cos.\omega.\,d\omega}{\frac{1}{2}r^2(\Omega-\sin.\Omega\cos.\Omega)},$$

c'est-à-dire

$$X=\frac{2}{3}r\frac{\sin.^3\Omega}{\Omega-\sin.\Omega.\cos.\Omega}.$$

89. A l'égard du secteur circulaire CMAN, comme on peut le décomposer en éléments différentiels triangulaires qui ont tous leurs centres de gravité placés aux $\frac{2}{3}$ du rayon, on reconnaît que la distance du centre de gravité de ce secteur au centre C est donnée par la formule du n° 85, multipliée par le facteur $\frac{2}{3}$; c'est-à-dire que cette distance a pour expression

$$X=\frac{2}{3}r\frac{\sin.\Omega}{\Omega}.$$

90. Soit une pyramide triangulaire dont le sommet est placé à l'origine des coordonnées rectangulaires, dont deux faces sont placées dans les plans des xy et des xz, et dont la base est parallèle au plan des yz. En désignant respectivement par $y=px$, $z=qx$ les équations de deux des arêtes qui aboutissent au sommet, l'équation du plan qui contient la face correspondante sera $z=qx-\frac{q}{p}y$. De plus, les trois côtés de la base pourront être représentés par a, pa et qa; et par conséquent on aura pour le volume de la pyra-

mide $\frac{1}{2}pqa^2.\frac{1}{3}a$, ou $\frac{1}{6}pqa^3$. Les formules du n° 77 donneront donc ici

$$X=\frac{\int_0^a dx.x\int_0^{px} dy\int_0^{qx-\frac{q}{p}y} dz}{\frac{1}{6}pqa^3},$$

$$Y=\frac{\int_0^a dx\int_0^{px} dy.y\int^{qx-\frac{q}{p}y} dz}{\frac{1}{6}pqa^3},$$

$$Z=\frac{\int_0^a dx\int_0^{px} dy\int_0^{qx-\frac{q}{p}y} dz.z}{\frac{1}{6}pqa^3};$$

c'est-à-dire, en effectuant les opérations indiquées,

$$X=\frac{3}{4}a,\qquad Y=\frac{1}{4}pa,\qquad Z=\frac{1}{4}qa;$$

d'où l'on conclut que le centre de gravité de la pyramide est placé aux trois quarts de la ligne menée du sommet au centre de gravité de la base.

On parviendra immédiatement au même résultat si l'on observe que cette ligne contient nécessairement tous les centres de gravité des éléments différentiels que l'on formerait en coupant la pyramide par des plans parallèles à la base. De plus, le volume de l'élément placé à la distance x du sommet est $\frac{1}{2}pqx^2.dx$.

Donc

$$X = \frac{\int_0^a dx.\frac{1}{2}pqx^3}{\frac{1}{6}pqa^3} = \frac{3}{4}a.$$

On voit également que le résultat dont il s'agit subsisterait lors même que la pyramide n'aurait point deux de ses faces latérales perpendiculaires à sa base, comme on l'a supposé; et qu'il peut être étendu au cas où la base de la pyramide serait un polygone d'une figure quelconque.

Connaissant le centre de gravité d'une pyramide triangulaire, on pourra d'ailleurs déterminer le centre de gravité d'un polyèdre quelconque à faces planes.

91. Les formules données n°s 83 et 84 s'appliquent facilement à la détermination des centres de gravité du volume et de la surface du segment sphérique. Considérons en premier lieu le segment décrit par la révolution de l'arc AM (*fig.* 17) autour du diamètre AC. Les x étant comptées du centre C, nous avons $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, r désignant le rayon de la sphère.

La formule du n° 83 donnera donc ici

$$X = \frac{\int_x^r dx.x(r^2 - x^2)}{\int_x^r dx(r^2 - x^2)} = \frac{3}{4}\cdot\frac{r^4 - 2r^2x^2 + x^4}{2r^3 - 3r^2x + x^3} = \frac{3}{4}\,\frac{y^4}{2r^3 - 3r^2x + x^3}$$

pour la distance du centre de gravité de ce volume au centre C, x désignant la distance CP. En retranchant x, puis posant $x = r - f$, f désignant la flèche AP, on

trouve pour la distance du centre de gravité au point P,

$$\frac{3}{4}\,\frac{r^2}{3r-f}.$$

En faisant $x=0$ ou $f=r$ on aura la distance au centre C du centre de gravité de la semi-sphère, qui est $\frac{3}{4}r$.

92. A l'égard du centre de gravité de la surface du même segment la formule du n° 84 se réduit à

$$X=\frac{\int_x^r dx\,x}{\int_x^r dx}=\frac{1}{2}(r+x).$$

Le centre de gravité dont il s'agit est donc placé au milieu de la flèche AP.

93. Enfin quant au volume du secteur sphérique décrit par la révolution du triangle mixtiligne CMA (*fig.* 17) autour du diamètre AC, on en connaîtra directement le centre de gravité en observant que ce secteur peut être décomposé en éléments différentiels formés par des pyramides ayant leurs sommets en C, et leurs bases à la surface convexe du segment. Or, d'après le n° 90 les centres de gravité de tous ces éléments sont placés sur la surface convexe d'un secteur dont l'amplitude est égale à celle du secteur proposé, mais dont le rayon est moindre dans le rapport de 3 à 4. Le centre de gravité de cette dernière surface convexe est donc le centre de gravité cherché du volume du secteur. On en conclut que ce centre de gravité est placé à la distance

$$\frac{3}{8}r(1-\cos.\Omega)$$

du point P. En faisant $\Omega = \frac{\pi}{2}$, le secteur proposé devient la demi-sphère : ainsi ce résultat s'accorde avec celui qui a été énoncé n° 91.

Usage des centres de gravité pour l'évaluation des aires et des volumes.

94. Considérons une ligne quelconque tracée dans un plan, et admettons que ce plan se meuve perpendiculairement à une autre ligne quelconque donnée, et vienne occuper une position qui s'écarte infiniment peu de sa position primitive. Cela posé, représentons-nous l'élément de surface décrit dans ce mouvement par la première ligne, et l'élément de volume décrit par l'aire que cette ligne embrasse sur le plan. Il est visible, en premier lieu, que l'aire élémentaire décrite aura pour mesure le produit de la longueur de la ligne génératrice par l'espace infiniment petit dont s'est déplacé son centre de gravité. En effet cette aire est égale au produit de la longueur de la génératrice par l'espace moyen parcouru par chacun de ses points. Or le calcul qui donnerait cet espace moyen ne diffère pas du calcul qui donnerait la distance des deux positions successives du centre de gravité de la ligne courbe. On conclut de cette remarque qu'ayant déterminé le centre de gravité de la génératrice, on aura l'aire de la surface décrite par cette ligne lorsque le plan dans lequel elle est tracée se mouvra perpendiculairement à une ligne quelconque, en multipliant la longueur de la première par l'espace qu'aura parcouru son centre de gravité.

95. En second lieu on voit également que le volume élémentaire décrit par l'aire embrassée par la ligne en question lorsque le plan de cette aire passe d'une position à une autre qui s'écarte infiniment peu de la première, est égal au produit de l'aire par l'espace parcouru par son centre de gravité. En effet ce volume est égal à l'aire génératrice multipliée par l'espace moyen parcouru par chacun de ses points. Ainsi le volume décrit par cette aire, lorsque son plan se meut perpendiculairement à une ligne quelconque, peut s'évaluer en multipliant l'aire par l'espace parcouru par son centre de gravité.

Ces deux propositions s'appliquent particulièrement à l'évaluation de l'aire de la surface, et du volume des solides de révolution. On voit que ces quantités sont connues aussitôt que l'on a déterminé les longueurs et les aires des courbes méridiennes et la position de leurs centres de gravité. Mais on reconnaît facilement que les propositions dont il s'agit conviennent seulement aux cas où le contour formé par la courbe génératrice se trouve tout entier constamment d'un même côté par rapport aux lignes droites d'intersection des positions occupées successivement par le plan de cette courbe.

VI. Notions fondamentales de la dynamique.

96. Cette science, aussi bien que la statique, emprunte à l'observation des faits naturels plusieurs notions fondamentales. La certitude de quelques-unes de ces notions est évidente. Il en est d'autres dont il n'est pas

aussi facile de reconnaître la vérité, mais à l'égard desquelles il ne reste aucun doute, lorsqu'on s'est assuré, après des comparaisons multipliées, que les conséquences qui s'en déduisent par des raisonnements rigoureux sont conformes aux phénomènes que la nature nous présente.

97. La *gravitation* est une propriété générale des corps. Tous les corps, en vertu d'une action réciproque dont nous ignorons entièrement la nature et le principe, sont attirés vers le centre de la terre; et la terre même et les planètes sont soumises à la même action, et s'attirent mutuellement. L'esprit pourrait sans doute, par une pure abstraction, concevoir les corps privés de la propriété dont il s'agit; mais dans la réalité elle en est inséparable. Tout corps est *pesant* : il exerce, pour s'approcher de la terre, un effort qu'il faut détruire si l'on veut maintenir ce corps immobile. Le *poids* des corps est la mesure de cet effort. On évalue les divers poids en les rapportant à un poids convenu pris pour unité.

L'unité de poids est en France le kilogramme; c'est-à-dire le poids d'un décimètre cube d'eau distillée, prise au maximum de densité.

98. La notion de la *masse* se rapporte à la quantité de parties matérielles dont on regarde chaque corps comme étant composé. Quand on compare deux corps homogènes de même nature, par exemple deux morceaux de fer, l'expérience apprend que leurs poids sont proportionnels à leurs volumes. Les quantités de parties matérielles contenues dans chacun sont aussi évidemment proportionnelles aux volumes. Ainsi, la

masse est alors nécessairement proportionnelle au poids. La même proposition s'étend à tous les cas, parce que nous regardons la force de la gravitation comme s'exerçant également sur toutes les parties matérielles, et l'action de cette force sur chaque corps comme l'indice et en quelque sorte la mesure de la quantité de matière qui les constituent. Les corps, sous le rapport dont il s'agit, ne diffèrent pour nous que par les diverses quantités de matière qui s'y trouvent contenues sous un même volume donné. Ainsi nous admettons ce principe, qu'il faut regarder comme une définition, que la *masse des corps est proportionnelle à leur poids*.

L'évaluation numérique des masses n'exige pas l'établissement d'une unité spéciale. On verra plus loin comment cette évaluation résulte de l'emploi d'autres unités.

L'idée de la masse est inséparable de la notion du corps. Les recherches de physique indiquent l'existence de quelques agents naturels qui produisent des impressions sur nos sens, et qui semblent néanmoins n'avoir pas de masse. Ce ne sont point, à proprement parler, des corps, ou du moins ce ne sont point des corps auxquels les théories mécaniques puissent s'appliquer.

99. Tous les esprits admettent l'idée du temps qui s'écoule et la notion des grandeurs relatives de divers intervalles de temps, d'où résulte, comme une conséquence nécessaire, la possibilité de mesurer et d'évaluer le temps en rapportant chaque intervalle à un intervalle déterminé pris pour unité. Les théories qui constituent la dynamique exigent nécessairement la con-

considération du temps regardé comme une quantité mesurable.

L'unité de temps, qui est aujourd'hui généralement adoptée, est la *seconde sexagésimale*, c'est-à-dire le $\frac{1}{3600}$ d'une heure, ou le $\frac{1}{86400}$ du jour moyen.

100. Le mot *mouvement* donne l'idée d'un phénomène qui consiste en ce qu'un corps matériel se déplace, et prend, à mesure que le temps s'écoule, des situations différentes dans l'espace. Un corps ne passe jamais d'une position à une autre sans occuper successivement toutes les positions intermédiaires. De plus, il s'écoule toujours un certain intervalle de temps entre l'instant où le corps a quitté sa première position et l'instant où ce même corps est parvenu à sa dernière position. La suite des positions intermédiaires des divers points du corps forme des lignes droites ou courbes que l'on peut concevoir tracées dans l'espace. Or ces lignes peuvent avoir été décrites dans des intervalles de temps plus ou moins longs, d'où résulte la notion de la *vitesse*. La vitesse est le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, ou, ce qui revient au même, l'*espace parcouru dans l'unité de temps*.

101. On peut concevoir le mouvement d'un point sans admettre que sa vitesse soit constante ou uniforme. En effet, les diverses parties d'une ligne qu'il aura décrite peuvent avoir été parcourues avec des vitesses différentes. Lorsque le mouvement d'un corps est tel que sa vitesse varie continuellement à mesure que le temps s'écoule et que le corps occupe de nouvelles situations dans l'espace, on se forme l'idée de la valeur de

la vitesse dans un instant déterminé, en concevant qu'à cet instant cette vitesse devienne constante, et voyant quel espace serait alors parcouru dans l'unité de temps.

Dans le langage de la mécanique on appelle *quantité de mouvement* d'un corps le *produit de sa masse par sa vitesse actuelle*.

102. On a dit n° 97 que la gravitation était une propriété générale des corps. Une autre propriété, non moins générale, et désignée sous le nom d'*inertie*, consiste en ce que l'état actuel d'immobilité ou de mouvement d'un corps n'est jamais altéré, à moins qu'une cause étrangère n'agisse sur ce corps. Un corps en repos, sur lequel aucune cause étrangère n'agira, ou qui sera soumis à des actions opposées qui se détruiront réciproquement, demeurera éternellement en repos. Si ce même corps est actuellement en mouvement, il conservera éternellement son mouvement, c'est-à-dire qu'il continuera éternellement à se mouvoir dans la même direction et avec la même vitesse, parcourant toujours en ligne droite des espaces égaux en temps égaux.

L'inertie, ainsi définie, doit être regardée comme une qualité inhérente à la matière, et dont l'existence nous est attestée par l'ensemble des phénomènes naturels. La notion de l'inertie est intimement liée à la notion de la masse. Tout assemblage de matière qui gravite et qui a de la masse ne peut être mis en mouvement sans présenter à cette modification une résistance qui doit être surmontée par une force.

103. Nous désignons en effet par le nom de *force* toute cause qui est capable de mettre en mouvement un

corps matériel immobile, ou d'altérer le mouvement actuel d'un tel corps. Or le mouvement d'un corps consiste, à proprement parler, dans ce fait qu'une masse donnée se déplace actuellement avec une vitesse donnée. Lorsqu'on compare divers mouvements les uns aux autres, on se représente qu'un mouvement est d'autant plus grand, 1° que la masse qui se meut est plus grande; 2° que la vitesse actuelle de cette masse est plus grande. Le produit de la masse par la vitesse est nommé *quantité de mouvement*, et considéré comme la mesure du mouvement. D'après cela, nous jugeons aussi de la grandeur relative des forces, c'est-à-dire des causes propres à produire ou altérer les mouvements, d'après la grandeur des quantités de mouvement qu'elles peuvent imprimer ou détruire.

Ainsi, l'on définit une force en disant qu'elle est capable d'imprimer à une certaine masse telle vitesse. Et l'on voit que les forces deviennent de cette manière des quantités mesurables dont les valeurs relatives sont exprimées par des nombres. Le nombre qui représente la valeur d'une force est le produit d'une masse par la vitesse que la force peut imprimer à cette masse.

On regarde d'après cela comme égales deux forces qui auront imprimé respectivement des quantités de mouvement telles que les masses seront réciproquement proportionnelles aux vitesses. Or cette conclusion s'accordera effectivement avec les phénomènes naturels, car l'expérience apprend non-seulement que des masses égales qui viennent se choquer avec des vitesses égales détruisent réciproquement leurs mouvements, mais encore que lorsque des masses inégales vien-

nent se choquer avec des vitesses en raison inverse des masses, les mouvements contraires sont aussi complétement détruits. De plus, on s'assure que le développement d'un même ressort imprime toujours aux corps des vitesses d'autant plus grandes que les masses sont plus petites.

104. Pour donner une connaissance complète de la manière dont les forces se définissent et s'évaluent, il reste à remarquer que l'action de plusieurs forces naturelles, celle de la gravité, par exemple, est continue, et même perpétuelle. Or, un corps soumis à l'action d'une telle force tend à acquérir une vitesse qui s'accroîtrait sans cesse. Par conséquent, une force de cette nature ne peut être définie en disant seulement qu'elle est capable d'imprimer une vitesse donnée à une masse donnée; il faut nécessairement introduire dans la définition la considération du temps pendant lequel l'action de cette force s'exerce. C'est pourquoi la définition propre des forces dont il s'agit consiste à dire qu'elles sont capables d'imprimer telle vitesse à une masse donnée dans un temps donné. La force est regardée comme d'autant plus grande que la masse et la vitesse sont plus grandes, et que le temps est plus petit. La valeur de la force est exprimée par le nombre qui représente le produit de la masse par la vitesse imprimée dans l'unité de temps.

105. La *gravité*, c'est-à-dire l'attraction mutuelle des corps, est de toutes les forces existantes celle qui produit les phénomènes les plus généraux et les plus importants, et celle dont la nature et les effets sont le mieux connus. La nature de la gravité, que nous considérons ici seu-

lement dans les effets qu'elle produit à la surface de la terre (nous la considérerons plus tard sous un point de vne plus étendu et plus exact), consiste : 1° en ce qu'elle affecte également toutes les parties matérielles, en sorte qu'elle imprime à tous les corps identiquement la même vitesse; 2° en ce que son action continue et toujours égale s'exerce absolument de la même manière quel que soit l'état de repos ou de mouvement actuel du corps. Un corps soumis à l'action de la gravité, soit qu'il parte du repos, soit qu'il se meuve dans une direction et avec une vitesse quelconques, acquerra toujours dans l'unité de temps et dans la direction de la verticale une même vitesse, c'est-à-dire que la vitesse avec laquelle il se meut actuellement augmentera toujours de la même quantité dans l'unité de temps. L'accroissement de vitesse que la gravité imprime aux corps est à Paris dans une seconde sexagésimale de $9^m,80896$. Ce nombre étant assigné, la force dont il s'agit est définie.

Ce qui vient d'être dit doit être regardé comme prouvé par l'observation des faits. On verra plus tard comment s'établit la certitude des propositions énoncées.

106. Il n'est pas difficile de concevoir, d'après ce qui précède, comment s'expriment en nombres les valeurs relatives des masses que l'on est obligé d'introduire dans les formules de la dynamique. Considérons l'action de la gravité sur un même corps : cette action peut produire deux effets entièrement différents. 1° Si le corps est maintenu immobile, l'effet produit consiste dans un effort ou pression exercé contre l'obstacle, et cette pression est mesurée par ce qu'on nomme le *poids* du

corps, que nous représenterons par P, en sorte que P désigne un nombre de kilogrammes. 2° Si au contraire le corps cède librement à l'action de la gravité, il acquerra dans l'unité de temps la vitesse de $9^m,80896$ par seconde : appelons m la masse du corps, et g cette vitesse, g désignant un nombre de mètres, ou en général d'unités de longueur; le produit mg représentera la quantité de mouvement que la gravité fait acquérir au corps dans l'unité de temps, et d'après ce qui a été dit nos 103 et 104, ce produit devra être pris pour la mesure de la force. Or cette force, c'est-à-dire cette cause identique agissant sur un corps, produisant des effets différents suivant que ce corps est libre ou retenu par un obstacle, est évidemment dans chaque cas mesurée et évaluée par les effets produits. Donc le nombre P ou le nombre mg sont également propres à exprimer la valeur de la force dont il s'agit : ces deux nombres sont donc nécessairement proportionnels l'un à l'autre. On peut même écrire $P=mg$, parce que les nombres P et g dépendent seuls d'unités convenues, c'est-à-dire des unités de poids, de longueur et de temps. L'unité de masse demeure arbitraire, et l'on peut toujours la supposer choisie de manière à ce que l'équation précédente subsiste.

On déduit de cette équation

$$m = \frac{P}{g} :$$

le nombre qui exprime la masse d'un corps est donc le quotient du poids de ce corps par la vitesse que la gra-

vité imprime aux corps pesants dans l'unité de temps. C'est d'après cette proposition que les formules de mécanique doivent être interprétées.

107. Réciproquement, si l'on a appris par l'observation qu'un corps de masse m, mû par l'action d'une force quelconque, acquiert dans l'unité de temps la vitesse g, c'est-à-dire que la quantité de mouvement du corps augmente dans l'unité de temps de la quantité mg, on en conclura que si un obstacle quelconque obligeait le corps à conserver sa vitesse actuelle et s'opposait à l'accélération de mouvement que la force tend à produire, il serait exercé contre cet obstacle, dans la direction de la force, une pression représentée numériquement par le produit mg. Ce produit est la mesure du poids du corps, en tant que ce poids est le résultat de l'action de la force qui imprimerait aux parties matérielles la vitesse g dans l'unité de temps.

L'exactitude de ces dernières notions paraîtra certaine si l'on observe que l'on peut vérifier par le fait, en se transportant dans divers lieux de la terre, que la valeur de g et le poids des corps varient dans le même rapport. On s'en assurerait en employant l'action des poids à comprimer des ressorts.

Les théories dynamiques sont fondées sur les notions qui viennent d'être exposées. On s'est efforcé de présenter ces notions avec clarté et exactitude ; mais il n'est peut-être pas possible que l'esprit les saisisse complétement avant d'en avoir connu le développement et les applications, et surtout qu'il les admette avec une entière conviction avant que l'on soit assuré que les résultats qui s'en déduisent présentent une image fidèle

des phénomènes naturels, et nous en donnent les véritables lois.

VII. Mouvement rectiligne des corps.

108. L'analyse mathématique donne les moyens d'exprimer facilement les lois des phénomènes qui appartiennent à la dynamique. Dans la géométrie, on détermine communément la position d'un point en donnant ses distances x, y, z à trois plans rectangulaires supposés fixes. Admettons que ce point soit en mouvement et occupe successivement diverses situations dans l'espace : les distances x, y, z seront alors des quantités variables, dont les valeurs changent à mesure que le temps s'écoule, et qui sont par conséquent des fonctions du temps t qui s'est écoulé à partir d'un instant déterminé pris pour origine du temps. Si l'on connaît les valeurs de x, y, z en fonction de t, on aura les moyens de déterminer la position du point à un instant quelconque, et par conséquent la nature de son mouvement sera entièrement connue.

109. Nous considèrerons d'abord le cas où un *point matériel* (c'est-à-dire une certaine quantité de matière, une masse que l'on suppose concentrée dans un volume extrêmement petit) se mouvrait en ligne droite, ce qui suppose évidemment que la force qui agit sur le point matériel, s'il en existe une, est dirigée dans le sens de cette ligne droite. Il suffit alors, pour déterminer à chaque instant la position du point matériel, de prendre une seule coordonnée x comptée à partir d'une origine

fixe et regardée comme une fonction du temps t. Une équation telle que

$$x = \varphi(t)$$

exprimera la nature du mouvement : x représente la distance comptée d'un point fixe, à laquelle le corps se trouve à la fin du temps t, qui est la variable indépendante.

Cela posé, le mouvement affecté par le corps, et dont la nature est exprimée par la fonction $\varphi(t)$, est un résultat nécessaire de diverses circonstances. La valeur de la distance x qui correspond à un temps quelconque t dépend 1° du lieu où le corps était placé à l'instant où l'on a commencé à compter le temps; 2° de la vitesse qu'il avait à ce même instant; 3° de la grandeur de la force constante ou variable avec le temps, par laquelle ce corps a été sollicité pendant toute la durée du temps t. Si l'on donnait la position et la vitesse initiales du corps, et l'expression en fonction du temps de la force qui le sollicite, on devrait pouvoir en conclure la forme de la fonction $\varphi(t)$. Réciproquement la fonction $\varphi(t)$ étant donnée, on en conclura la valeur de la vitesse du point matériel au bout d'un temps quelconque, et l'expression de la force qui produit le mouvement de ce point.

1° Quant à la vitesse qui a lieu au bout du temps t, on se rappellera que d'après les n°s 100 et 101 la vitesse est le rapport de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir, ou l'espace parcouru pendant l'unité de temps. Désignant par Δt un certain temps écoulé après le temps t, et par Δx l'espace parcouru pendant ce temps, le rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ représenterait donc la vitesse demandée

si la valeur de ce rapport était constante, ou si Δx était proportionnel à Δt. Or, en général, la valeur du rapport dont il s'agit dépend de la grandeur absolue de l'accroissement Δt, et il est visible que l'on ne peut attribuer ici aucune valeur finie déterminée à cet accroissement : 1° parce que cette valeur serait arbitraire; 2° parce que ce serait faire dépendre la détermination de la vitesse qui a lieu au bout du temps t des modifications que peut subir le mouvement du point matériel après ce temps. Donc l'accroissement Δt doit être supposé plus petit que toute grandeur donnée, ou infiniment petit, c'est-à-dire qu'on doit prendre pour l'expression de la vitesse au bout du temps t la limite dont s'approche la quantité $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ lorsque Δt tend à devenir égal à zéro, limite qui n'est autre chose que le coefficient différentiel $\frac{dx}{dt}$. Il résulte de ces considérations, tout à fait semblables à celles qui ont été présentées dans les n°s 5 et suivants des *Leçons d'analyse*, qu'en désignant par u la vitesse du point matériel qui a lieu à la fin du temps t, l'équation $x = \varphi(t)$ entraîne toujours la suivante

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad \text{ou} \quad u = \frac{d.\varphi(t)}{dt}.$$

La vitesse est donc représentée par le coefficient différentiel du premier ordre de l'expression analytique qui donne l'espace parcouru au bout du temps t en fonction de ce temps.

110. 2° Quant à la valeur de la force par laquelle le corps est sollicité au bout du temps t, on se rappellera

également que, d'après les nos 104 et suivants, la force qui produit ou modifie le mouvement d'un corps est mesurée par la quantité de mouvement que cette force imprime dans l'unité de temps, c'est-à-dire par le produit de la masse du corps multipliée par la quantité dont la vitesse de cette masse s'accroît dans l'unité de temps. Soit en général Δt un certain temps écoulé à la suite du temps t, et Δu l'accroissement reçu par la vitesse u pendant ce temps. Le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ donnerait donc la vitesse acquise dans l'unité de temps si la valeur de ce rapport était constante, ou si l'accroissement Δu était proportionnel à Δt. Cette proportionnalité n'ayant pas lieu en général, les mêmes considérations qui ont été exposées dans le numéro précédent montrent que la vitesse acquise dans l'unité de temps doit s'exprimer par la limite vers laquelle tend $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ lorsque Δt devient de plus en plus petit, c'est-à-dire par le coefficient différentiel $\frac{du}{dt}$. On en conclut donc que l'on a

$$\frac{du}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2.\varphi(t)}{dt^2},$$

pour l'expression de la vitesse que la force par laquelle le point matériel est sollicité à la fin du temps t imprime à ce point matériel dans l'unité de temps. Ainsi cette vitesse est représentée par le coefficient différentiel du premier ordre de l'expression de la vitesse du point matériel en fonction du temps, ou par le coefficient différentiel du second ordre de l'expression de l'espace parcouru en fonction du temps.

Si la masse du point matériel est désignée par m, la quantité de mouvement acquise par ce point dans l'unité de temps sera donc

$$m\frac{du}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d^2.\varphi(t)}{dt^2};$$

et par conséquent ces expressions donnent en unités de poids, d'après le n° 107, l'effort exercé contre le point matériel, à la fin du temps t, par la force qui le sollicite.

111. Nous considérerons d'abord les formes les plus simples que puisse prendre l'équation $x=\varphi(t)$. Soit en premier lieu

$$x=a+bt, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dt}=b, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=0,$$

a et b désignant des constantes. Il est visible, 1° que la constante a représente la distance à laquelle le point matériel se trouve de l'origine des x à l'instant où l'on commence à compter le temps; 2° que le point matériel parcourt des espaces égaux en temps égaux, c'est-à-dire se meut d'un mouvement uniforme, dont la vitesse est représentée par la constante b; 3° que le point matériel n'est sollicité par aucune force. Il se meut par l'effet de la vitesse qui lui avait été imprimée avant l'instant où l'on commence à compter le temps, et ce mouvement se conserve sans altération.

L'équation précédente est ce que l'on nomme *l'équation du mouvement uniforme*.

112. Soit encore

$$x=a+bt+ct^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{dx}{dt}=b+2ct, \quad \frac{d^2x}{dt^2}=2c,$$

a, b, c désignant des constantes. On voit ici 1° que la constante a représente comme ci-dessus la distance initiale du point matériel, à l'origine des x; 2° que la constante b représente la valeur initiale de la vitesse du point matériel; que cette vitesse croît proportionnellement au temps, et qu'elle reçoit dans chaque unité de temps un accroissement égal à $2c$; 3° que le point matériel est sollicité par une force dont l'action est invariable et lui imprime dans l'unité de temps une vitesse égale au double de la constante c. Si l'on désigne par m la masse du point matériel, cette force exerce constamment contre ce point un effort exprimé en unités de poids par $2mc$.

Le mouvement représenté par l'équation précédente est appelé *mouvement uniformément accéléré*, parce que la vitesse croît avec le temps, et croît de quantités égales en temps égaux. Nous supposons ici les constantes b et c positives.

113. Ces exemples suffisent pour montrer comment l'équation $x=\varphi(t)$ exprime la nature du mouvement rectiligne d'un corps, et fait connaître les principales circonstances de ce mouvement, telles que la vitesse du corps à un instant donné, la valeur à un instant donné de la force par laquelle le corps est sollicité, et l'état initial de ce corps, c'est-à-dire sa position et sa vitesse à l'origine du mouvement. Réciproquement on conçoit que si l'on donnait la valeur de la force qui sollicite le corps en fonction du temps t, c'est-à-dire le coefficient différentiel du second ordre de la fonction $x=f(t)$, une première intégration ferait connaître l'expression de la vitesse u en fonction de t, ou le coefficient différentiel

du premier ordre de cette fonction; et une seconde intégration donnerait l'expression de la fonction elle-même. Les constantes introduites par ces intégrations se détermineraient évidemment d'après la considération de l'état initial du corps. Mais le plus souvent, dans les questions naturelles, l'expression des forces qui sollicitent les corps n'est pas donnée en fonction du temps : les valeurs de ces forces dépendent de la position actuelle des corps, ou de leurs vitesses actuelles, ce qui peut rendre difficile la recherche des mouvements qui résultent de l'action de forces données.

Mouvement rectiligne d'un corps produit par l'action de la gravité.

114. Il résulte des notions présentées dans les nos 103, 104 et 105, que la nature d'une force telle que la gravité consiste en ce qu'elle imprime toujoursx aux corps qui cèdent à son action, dans chaque partie égale de temps, une partie égale de vitesse. On définira donc la nature du mouvement résultant de l'action de cette force en exprimant simplement que la vitesse croît également en temps égaux. Or cette circonstance est indiquée par l'équation

$$x = a + bt + ct^2$$

du n° 112, puisqu'on a vu que dans le mouvement qu'elle représente la vitesse croissait de la quantité constante $2c$ dans l'unité de temps. Donc l'équation précédente est propre à représenter la nature du mouvement des corps qui cèdent librement à la gravité. L'observation apprend effectivement que les propriétés du

mouvement des corps graves sont conformes à ce qui est énoncé n° 112.

De plus, si, comme cela est d'usage, on désigne par la lettre g la vitesse $9^m,80896$ par seconde que la gravité imprime aux corps pesants en une seconde à Paris, il est clair qu'il faudra faire $2c=g$, ou $c=\frac{1}{2}g$; en sorte qu'en écrivant

$$x=a+bt+\frac{1}{2}gt^2,$$

on aura l'expression exacte du mouvement des corps graves : x est une abscisse comptée verticalement de haut en bas à partir d'un point fixe ; a est la distance de ce corps à ce point fixe à l'instant d'où l'on commence à compter le temps ; b est la vitesse du corps à ce même instant, c'est-à-dire la vitesse initiale.

115. Considérons en particulier le cas où le corps est placé à l'origine des x, et n'a point de vitesse initiale lorsqu'il commence à se mouvoir en cédant à l'action de la gravité. On a alors simplement

$$x=\frac{1}{2}gt^2,$$

et si l'on désigne par u la vitesse acquise par le corps au bout du temps t, on aura de plus

$$u=\frac{dx}{dt}=gt.$$

Les espaces parcourus, représentés par x, croissent comme le quarré du temps. La vitesse croît proportionnellement au temps. On déduit des équations précédentes

$$u=\sqrt{2g.x}, \qquad x=\frac{u^2}{2g}.$$

Un corps après être tombé de la hauteur x a donc acquis la vitesse $\sqrt{2g.x}$. Ce résultat s'exprime communément en disant que la *vitesse due à la hauteur* x est égale à $\sqrt{2g.x}$. Réciproquement on dit que la hauteur $\frac{u^2}{2g}$, dont le corps doit être tombé pour avoir acquis la vitesse u, est la *hauteur due à la vitesse* u. La considération des vitesses dues aux hauteurs et des hauteurs dues aux vitesses revient fréquemment dans les applications de la mécanique, et particulièrement dans l'hydraulique. On a calculé des tables de leurs valeurs correspondantes.

L'espace parcouru dans la première unité de temps est $\frac{1}{2}g$; et comme g représente la vitesse que la force imprime dans l'unité de temps, on voit que l'espace dont il s'agit est représenté par la moitié du nombre qui représente cette vitesse. En général, si, après un temps quelconque t, le mouvement du corps devenait uniforme, ce corps parcourrait ensuite dans un temps égal à t un espace double de celui qu'il avait déjà parcouru.

116. Dans l'équation précédente

$$x=a+bt+\frac{1}{2}gt^2,$$

les constantes a, b, g ont été supposées positives. En général, le signe de a dépendra de la position du point matériel par rapport à l'origine des x à l'instant où l'on

commence à compter le temps ; on le fera négatif si cette position est en arrière de l'origine. Le signe de b dépend de la direction du mouvement initial du corps ; on le ferait négatif si ce mouvement était dirigé de manière à diminuer l'abscisse x. Enfin on doit donner à g le signe + lorsque l'abscisse x est comptée de haut en bas, c'est-à-dire dans le sens du mouvement que la gravité tend à imprimer. On lui donnerait le signe — dans le cas contraire.

On voit par là que l'équation

$$x = -bt + \frac{1}{2}gt^2,$$

qui donne pour l'expression de la vitesse

$$u = \frac{dx}{dt} = -b + gt,$$

représente le mouvement d'un corps grave qui serait lancé de bas en haut avec la vitesse b. L'action de la gravité diminue progressivement la vitesse du corps : cette vitesse devient nulle après un temps $\frac{b}{g}$, et l'espace qui a été parcouru verticalement de bas en haut est alors $-\frac{b^2}{2g}$, c'est-à-dire la hauteur due à la vitesse b ; d'où l'on voit que le corps monte contre la direction de la gravité précisément à la hauteur dont il aurait dû descendre pour acquérir sa vitesse initiale. Parvenu à ce point, le corps redescend, et son mouvement s'accélère uniformément.

Mouvement rectiligne d'un corps grave, dans le cas où ce mouvement est altéré par une résistance.

117. Les numéros précédents font connaître la nature du mouvement d'un corps qui céderait sans aucun obstacle à l'action de la gravité. Dans la réalité, la chute des corps ne s'opère pas d'une manière exactement conforme aux résultats qui ont été présentés, parce que la résistance des fluides dans lesquels les corps se meuvent, ou d'autres obstacles, altèrent le mouvement que la gravité tend à imprimer.

Revenons aux notions présentées nos 105 et 106. Soit m la masse d'un corps. L'action de la gravité sur ce corps est représentée par le poids mg. Cette action est absolument pareille à celle d'une main qui suivrait le corps en le poussant par l'intermédiaire d'un ressort, ce ressort étant continuellement comprimé comme il le serait par le poids mg. C'est cette même action qui surmonte la résistance que l'inertie du corps oppose à la variation de son mouvement, et qui fait augmenter constamment la vitesse de ce corps de la quantité g dans l'unité de temps. Si l'action dont il s'agit venait à cesser, ou si elle était détruite par une action égale dirigée en sens contraire, la vitesse du corps n'augmenterait plus, et son mouvement deviendrait uniforme.

118. Les résistances qui altèrent le mouvement des corps graves produisent absolument le même effet qu'une main qui agirait sur le corps, par l'intermédiaire d'un ressort, dans une direction exactement contraire à celle du mouvement. Soit donc F la valeur en unités de poids de l'effort provenant de la résistance, c'est-à-dire de

l'effort avec lequel le ressort dont on vient de parler se trouverait comprimé. Le corps poussé par la gravité avec l'effort mg, repoussé en sens contraire avec l'effort F, est dans le même cas que s'il était seulement poussé dans le sens de la gravité avec l'effort mg—F. D'où il suit que ce corps n'acquerra plus dans l'unité de temps la vitesse g, mais seulement la vitesse $\frac{mg-F}{m}$, ou $g-\frac{F}{m}$.

D'après cela, en se rapportant au n° 109 et suivants, désignant par x l'espace parcouru au bout du temps t, par u la vitesse acquise au bout du temps, en sorte que $u=\frac{dx}{dt}$, on voit que le mouvement du corps est assujetti à la condition

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dt}=g-\frac{F}{m}.$$

Lorsque la valeur de la résistance F sera donnée, aussi bien que l'état initial du corps, on pourra toujours déduire de cette équation la nature du mouvement.

Dans les cas naturels, l'effort de la résistance, désigné ci-dessus par F, dépend le plus souvent de la valeur de la vitesse actuelle u, et peut être regardé comme une fonction déterminée de cette vitesse. On écrira donc $\varphi(u)$ à la place de F, et par conséquent

$$\frac{du}{dt}=g-\frac{1}{m}\varphi(u);$$

d'où

$$dt=\frac{du}{g-\frac{1}{m}\varphi(u)}, \quad \text{et} \quad t=\int_U^u \frac{du}{g-\frac{1}{m}\varphi(u)},$$

en désignant par U la vitesse initiale du corps. La relation entre u et t étant ainsi obtenue, on déterminera ensuite l'expression de x en fonction de t en mettant à la place de u sa valeur en t dans l'équation

$$dx = u.dt, \qquad \text{qui donne} \qquad x = \int_0^t u.dt,$$

et quelquefois il sera plus facile de déterminer x en fonction de u, en mettant à la place de dt sa valeur en u et du dans la même équation, ce qui donne

$$dx = \frac{u.du}{g - \frac{1}{m}\varphi(u)}, \qquad \text{et} \qquad x = \int_U^u \frac{u.du}{g - \frac{1}{m}\varphi(u)}.$$

Après l'intégration on substituera si l'on veut à la place de u sa valeur en t.

119. Nous considérerons les formes les plus simples que l'on puisse admettre pour la fonction $\varphi(u)$.

Le premier cas est celui où l'on poserait $\varphi(u) = A$, la lettre A désignant une constante, ce qui revient à dire que la résistance consiste dans un effort constant, indépendant de la vitesse du corps, et dont la valeur en poids est A. Le mouvement est alors conforme à ce qu'on a vu dans les nos 114 et 115, pourvu que l'on substitue à la place de g la quantité $g - \frac{A}{m}$. Ce mouvement est toujours uniformément accéléré; mais l'accélération est moins rapide, et d'autant moins que la masse du corps est plus petite.

120. Le second cas est celui où l'on poserait $\varphi(u) = A + Bu$, l'effort de la résistance étant censé formé de deux parties, l'une constante et l'autre proportionnelle à la vitesse.

On aurait alors

$$dt = \frac{du}{g - \frac{A}{m} - \frac{B}{m} u},$$

dont l'intégrale est

$$t = const. - \frac{m}{B} . l \left(g - \frac{A}{m} - \frac{B}{m} u \right).$$

Désignant par U la vitesse initiale, et par conséquent déterminant la constante de manière que $u = U$ quand $t = 0$, il vient

$$t = \frac{m}{B} . l \frac{mg - A - BU}{mg - A - Bu},$$

équation d'où l'on tire

$$u = \left(U - \frac{mg - A}{B} \right) e^{-\frac{B}{m} t} + \frac{mg - A}{B},$$

e désignant la base des logarithmes hyperboliques. La vitesse s'approche sans cesse de la limite $\frac{mg - A}{B}$, qu'elle n'atteindrait rigoureusement qu'après un temps infini, mais dont elle diffère très-peu après un temps d'autant plus court que la masse m est plus petite. Le mouvement du corps s'approche donc sans cesse, et bientôt ne diffère plus sensiblement d'un mouvement uniforme dans lequel l'espace $\frac{mg - A}{B}$ est parcouru dans l'unité de temps. On a alors $mg = A + Bu$, c'est-à-dire que la résistance est égale au poids du corps.

On a d'ailleurs

$$dx = dt \left[\left(U - \frac{mg - A}{B} \right) e^{-\frac{B}{m} t} + \frac{mg - A}{B} \right],$$

et en intégrant et déterminant la constante de manière que $x=0$ quand $t=0$,

$$x=\frac{m}{B}\left(U-\frac{mg-A}{B}\right)\left(1-e^{-\frac{B}{m}t}\right)+\frac{mg-A}{B}t$$

pour l'expression de l'espace parcouru au bout du temps t.

121. Supposons encore $\varphi(u)=A+Bu+Cu^2$, ce qui revient à regarder la résistance comme étant formée de trois parties, l'une constante, la seconde proportionnelle à la vitesse, la troisième proportionnelle au quarré de la vitesse. On aura

$$dt=\frac{du}{g-\frac{A}{m}-\frac{B}{m}u-\frac{C}{m}u^2}=\frac{m.du}{mg-A-Bu-Cu^2},$$

dont l'intégrale, ($mg-A$ étant supposé positif), est

$$t=\frac{m}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}}.l\frac{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}+(B+2Cu)}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}-(B+2Cu)}+const.;$$

et déterminant la constante de manière que l'on ait $u=U$ quand $t=0$,

$$t=\frac{m}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}}.$$

$$l\left[\frac{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}+(B+2Cu)}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}-(B+2Cu)}.\frac{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}-(B+2CU)}{\sqrt{B^2+4C(mg-A)}+(B+2CU)}\right]$$

Cette équation étant résolue par rapport à u fera connaître la vitesse en fonction du temps t. On pourrait ensuite dérerminer x en fonction de t comme on l'a fait dans le numéro précédent.

122. Nous appliquerons la solution au cas où l'on aurait $A=0$ et $B=0$, c'est-à-dire où la résistance serait simplement supposée proportionnelle au quarré de la vitesse, hypothèse qui diffère peu de la vérité lorsqu'il s'agit d'un corps grave tombant dans un fluide tel que l'air ou l'eau. Les expressions précédentes se réduisent alors à

$$dt=\frac{m.du}{mg-Cu^2},$$

$$t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{Cg}}.l\left[\frac{1+u\sqrt{\frac{C}{mg}}}{1-u\sqrt{\frac{C}{mg}}}\cdot\frac{1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}}{1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}}\right];$$

et l'on déduit de cette dernière

$$u=\sqrt{\frac{mg}{C}}.\frac{\left(1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}}-\left(1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)}{\left(1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}}+\left(1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)}.$$

La vitesse dont U représente la valeur initiale, s'approche continuellement de la limite $\sqrt{\frac{mg}{C}}$ qu'elle ne pourrait atteindre rigoureusement qu'après un temps infini, mais dont elle ne diffère pas sensiblement après un temps limité, et d'autant plus court que la masse m est plus petite. On a alors $Cu^2=mg$; c'est-à-dire que la résistance est égale au poids du corps. Ce mouvement a le même caractère que celui du n° 120.

L'équation $dx = udt$ donne ici, en mettant pour dt sa valeur en u,

$$dx = \frac{u.du}{g - \frac{C}{m}u^2};$$

et en intégrant et déterminant la constante de manière que $x=0$ quand $u=U$,

$$x = \frac{m}{2C}.l\frac{1 - U^2\frac{C}{mg}}{1 - u^2\frac{C}{mg}}.$$

Si l'on substitue dans cette expression pour u sa valeur précédente en t, il viendra

$$x = \frac{m}{C}\left[l\left\{\left(1+U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)e^{t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} + \left(1-U\sqrt{\frac{C}{mg}}\right)e^{-t\sqrt{\frac{Cg}{m}}}\right\} - l2\right].$$

123. Si l'on supposait nulle la vitesse initiale désignée par U, on aurait simplement

$$u = \sqrt{\frac{mg}{C}}.\frac{e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} - 1}{e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} + 1};$$

et

$$x = -\frac{m}{2C}.l\left(1 - u^2\frac{C}{mg}\right),$$

ou bien

$$x = \frac{m}{C}\left[l\left(e^{2t\sqrt{\frac{Cg}{m}}} - 1\right) - t\sqrt{\frac{Cg}{m}} - l2\right];$$

et lorsque le temps t aura acquis une certaine valeur, cette dernière formule ne différera pas sensiblement de

$$x=\frac{m}{C}\left[t\sqrt{\frac{Cg}{m}}-l2\right],\quad \text{ou}\quad x=\sqrt{\frac{mg}{C}}.t-\frac{m}{C}.l2.$$

124. Tout ce qui a été dit depuis le n° 117 se rapporte au cas d'un corps pesant qui tombe en cédant à l'action de la gravité, et au mouvement duquel est opposée une résistance dirigée en sens contraire de cette action. Si l'on considérait le cas d'un corps qui aurait été lancé verticalement de bas en haut, la résistance serait alors dirigée dans le même sens que la gravité, et il faudrait changer dans les formules les signes des termes qui représentent la valeur de cette résistance.

Dans le cas du n° 120, il viendrait alors, les x étant comptées maintenant de bas en haut,

$$dt=-\frac{du}{g+\frac{A}{m}+\frac{B}{m}u},$$

$$t=\frac{m}{B}.l\frac{mg+A+BU}{mg+A+Bu},$$

$$u=\left(U+\frac{mg+A}{B}\right)e^{-\frac{B}{m}t}-\frac{mg+A}{B},$$

$$x=\frac{m}{B}\left(U+\frac{mg+A}{B}\right)\left(1-e^{-\frac{B}{m}t}\right)-\frac{mg+A}{B}t.$$

La vitesse diminue progressivement, et devient nulle après un temps dont la valeur est

$$\frac{m}{B}.l\frac{mg+A+BU}{mg+A}.$$

125. Dans le cas du n° 122, où la résistance est simplement proportionnelle au quarré de la vitesse, on a, les x étant comptées de bas en haut,

$$dt = -\frac{m.du}{mg+Cu^2},$$

dont l'intégrale est

$$t = const. - \sqrt{\frac{m}{Cg}}.\ \text{arc. tang.}\ u\sqrt{\frac{C}{mg}};$$

et en appelant U la vitesse initiale,

$$t = \sqrt{\frac{m}{Cg}}\,\text{arc. tang.}\frac{(U-u)\sqrt{Cmg}}{mg+CUu}.$$

On en déduit

$$u = \sqrt{\frac{mg}{C}}\,\text{tang.}\left\{\text{arc tang. U}\sqrt{\frac{C}{mg}} - t\sqrt{\frac{Cg}{m}}\right\}.$$

La vitesse diminue progressivement, et devient nulle après un temps dont la valeur est

$$\sqrt{\frac{m}{Cg}}.\ \text{arc tang. U}\sqrt{\frac{C}{mg}}.$$

On a ensuite pour déterminer l'espace parcouru,

$$dx = -\frac{u.du}{g+\frac{C}{m}u^2},$$

d'où l'on déduit

$$x = \frac{m}{2C}.l\,\frac{mg+CU^2}{mg+Cu^2}.$$

La hauteur à laquelle s'élève le mobile est

$$\frac{m}{2C}.l\left(1+\frac{C}{mg}U^2\right).$$

En mettant à la place de u sa valeur, on trouve pour l'expression de x en fonction de t,

$$x=\frac{m}{C}.l\left(\cos t\sqrt{\frac{Cg}{m}}+U\sqrt{\frac{C}{mg}}.\sin.t\sqrt{\frac{Cg}{m}}\right).$$

126. Nous pouvons considérer encore un cas plus simple que les précédents, celui d'un corps lancé suivant une direction quelconque dans un milieu résistant, et qui ne serait pas soumis à l'action de la gravité.

Si la résistance est simplement proportionnelle à la vitesse, il suffira de supposer $g=0$ et $A=0$ dans les formules du n° 120 ou dans celles du n° 124. On trouvera ainsi

$$u=U.e^{-\frac{B}{m}t},$$

$$x=\frac{m}{B}U\left(1-e^{-\frac{B}{m}t}\right).$$

La vitesse décroît très-rapidement avec le temps, et quoiqu'elle ne devienne rigoureusement nulle qu'après un temps infini, l'espace que le corps peut parcourir est limité et ne peut surpasser $\frac{m}{B}U$.

127. Si la résistance est proportionnelle au quarré de la vitesse, on aura

$$dt=-\frac{m.du}{Cu^2},$$

d'où l'on déduit

$$t = \frac{m}{C}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{U}\right),$$

$$u = \frac{U}{\frac{CU}{m}t + 1},$$

$$x = \frac{m}{C} . l\left(\frac{CU}{m}t + 1\right).$$

La vitesse décroît avec le temps, et finit par devenir nulle après un temps infini ; néanmoins l'espace parcouru par le corps n'est pas limité, comme il l'est dans le cas précédent.

Mouvement rectiligne d'un corps grave au-dessus et au-dessous de la surface de la terre, en ayant égard à la variation de la gravité.

128. La force avec laquelle un corps est attiré vers le centre de la terre, et qui résulte de l'action de la gravité, peut être supposée constante dans la plupart des applications de la mécanique, pourvu que l'on attribue à cette force la valeur qu'elle présente effectivement dans le lieu de la terre où l'on se trouve. Non-seulement cette valeur varie suivant les lieux, mais de plus, dans chaque point, elle décroît, à mesure qu'on s'élève au-dessus de la surface de la terre, dans le rapport des quarrés des distances au centre ; elle décroît également, à mesure qu'on s'abaisse au-dessous de la surface, dans le rapport des distances au centre. Nous considérerons, en ayant égard à ces variations, le mouvement d'un corps pesant qu'on laisserait tomber d'une hauteur donnée au-dessus de la surface de la terre.

Nous avons ici pour l'équation du mouvement, le corps étant au-dessus de cette surface,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=g\frac{R^2}{(a-x)^2}.$$

Dans cette équation :

g est la vitesse imprimée aux corps pesants dans l'unité de temps par la gravité à la surface de la terre ;

R le rayon terrestre $=\dfrac{10{,}000{,}000^m}{\frac{1}{2}\pi}=6366198^m$;

a la distance initiale du mobile au centre de la terre ;

x l'espace parcouru par le corps, au bout du temps t, compté de haut en bas.

Multipliant les deux membres par dx, et intégrant, il vient

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2g\frac{R^2}{a-x}+const.;$$

ou, en appelant u la vitesse au bout du temps t,

$$u^2=2g\frac{R^2}{a-x}+const.$$

Si la vitesse initiale est nulle, on a en même temps $x=0$, $u=0$: cette équation devient alors

$$u^2=2gx\frac{R^2}{a(a-x)},\quad \text{d'où}\quad x=\frac{u^2}{2g}\cdot\frac{1}{\frac{R^2}{a^2}+\frac{u^2}{2ga}}.$$

129. De l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{2gR^2x}{a(a-x)},$$

on tire

$$dt = \sqrt{\frac{a}{2gR^2}} . dx \sqrt{\frac{a-x}{x}},$$

dont l'intégrale est

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gR^2}} \left\{ \sqrt{ax - x^2} + \frac{a}{2} \text{ arc cos.} \frac{a-2x}{a} \right\}.$$

La constante est nulle parce que l'on suppose l'espace x compté à partir du point de départ du corps.

130. Le corps arrivera à la surface de la terre quand on aura $x = a - R$, ce qui donnera

$$u^2 = 2g\,(a - R).\frac{R}{a},$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{2gR^2}} \left\{ \sqrt{(a-R)R} + \frac{a}{2} \text{ arc cos. } \frac{2R-a}{a} \right\}.$$

131. Lorsque le corps descend au-dessous de la surface l'équation du mouvement est

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\,\frac{R-x}{R};$$

x représentant la distance du corps à la surface de la terre, au bout du temps t, comptée de haut en bas. Multipliant les deux membres par dx, et intégrant, on a

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{g}{R}(2Rx - x^2) + const.;$$

ou

$$u^2 = \frac{g}{R}(2Rx - x^2) + const.$$

Si U désigne la vitesse du corps à l'instant où il part de la surface de la terre, et où l'on a $x=0$, cette équation devient

$$u^2=U^2+2gx-\frac{gx^2}{R}.$$

132. De l'équation

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=U^2+2gx-\frac{gx^2}{R},$$

on déduit

$$dt=\frac{dx}{\sqrt{U^2+2gx-\frac{gx^2}{R}}},$$

dont l'intégrale est

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}.\ \text{arc cos.}\ (R-x)\sqrt{\frac{g}{RU^2+gR^2}}+const.;$$

et si le temps t est compté à partir du moment où le corps part de la surface de la terre, et où l'on a $x=0$, cette formule devient

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}\left\{\text{arc cos.}(R-x)\sqrt{\frac{g}{RU^2+gR^2}}-\text{arc cos.}\sqrt{\frac{gR}{U^2+gR}}\right\}.$$

133. Considérons le cas où le corps part de la surface de la terre avec une vitesse initiale nulle. On a alors

$$u^2=2gx-\frac{gx^2}{R},\quad \text{et}\quad x=R\left(1\pm\sqrt{1-\frac{u^2}{gR}}\right);$$

$$t=\sqrt{\frac{R}{g}}\ \text{arc cos.}\ \frac{R-x}{R},\quad \text{et}\quad x=R\left(1-\cos.t\sqrt{\frac{g}{R}}\right);$$

et en égalant ces deux valeurs de x,

$$u=\sqrt{gR}.\sin.t\sqrt{\frac{g}{R}}, \quad \text{et} \quad t=\sqrt{\frac{R}{g}}.\text{arc sin.}\frac{u}{\sqrt{gR}}.$$

Le corps partant de la surface de la terre avec une vitesse nulle a acquis, quand il est parvenu au centre, la vitesse $\sqrt{gR}$; et comme l'équation posée n° 131 convient également au cas où le corps se meut en s'éloignant du centre, et où x est supposé $>R$, on reconnaît que le corps animé de cette vitesse dépassera le centre, et se mouvant avec une vitesse décroissante atteindra le point opposé de la surface de la terre à l'instant où cette vitesse sera devenue nulle. L'action de la gravité lui imprimera alors en sens contraire un mouvement pareil à celui qu'elle venait de lui communiquer, et en vertu duquel ce corps se trouvera ramené à son point de départ qu'il atteindra également avec une vitesse nulle. Le mouvement du corps consistera donc dans une suite indéfinie d'oscillations, dans lesquelles le diamètre de la terre sera parcouru alternativement en sens opposés. La plus grande vitesse a lieu quand le corps passe au centre, et cette quantité varie avec le temps, suivant une loi exprimée par les valeurs du sinus. L'intervalle de temps nécessaire pour parcourir le diamètre de la terre, c'est-à-dire la durée d'une demi-oscillation, se connaît en posant

$$\sin.t\sqrt{\frac{g}{R}}=0, \quad \text{ou} \quad t\sqrt{\frac{g}{R}}=\pi, \quad \text{d'où} \quad t=\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

π désignant la demi-circonférence dont le rayon est l'unité.

VIII. Équations générales du mouvement d'un point matériel libre, sollicité par des forces quelconques.

134. Dans les questions qui viennent d'être résolues, le mouvement du point matériel était rectiligne, parce que l'on a supposé ce point lancé dans la direction même de la pesanteur, et parce que les résistances ont été regardées comme des actions dirigées en sens contraire du mouvement. Nous considérerons maintenant le cas général où un corps serait soumis à l'action de forces quelconques dont les intensités et les directions peuvent varier avec le temps et avec la position de ce corps.

Nous avons expliqué dans les nos 103, 104, 105, 106 et 117 comment les forces étaient définies et évaluées. Nous considérons ici des forces dont l'action est continue, telles que la gravité. Il serait possible que cette action ne s'exerçât que pendant un temps très-court : ce sera une circonstance particulière à laquelle on aura égard dans les cas où elle se présentera. Nous dirons d'ailleurs que, dans la nature, aucune action n'est rigoureusement instantanée. Lorsqu'on considère de telles actions, c'est par une abstraction purement mathématique, dont il n'est pas question dans cet article. Il y a deux manières de définir une force, soit en donnant en unités de poids l'effort qu'elle exerce contre le corps, soit en donnant en unités de longueur la vitesse qu'elle peut imprimer à une certaine masse dans l'unité de temps ; nommant P l'effort exercé et g la vitesse que la force pourrait imprimer dans l'unité de temps à un corps dont la masse est m, il existera nécessairement entre ces

quantités la relation $P = mg$. Quant à la direction de la force, on la détermine, comme on l'a vu n° 20, en donnant les angles que cette direction forme avec trois axes rectangulaires fixes.

Nous avons également expliqué n° 108 la manière dont on exprimait la nature du mouvement d'un corps, en déterminant sa position à chaque instant par les valeurs de trois coordonnées rectangulaires qui sont regardées comme des fonctions variables du temps.

135. Le mouvement que prend un corps résulte nécessairement : 1° de la vitesse initiale avec laquelle il a été lancé dans l'espace, 2° des actions exercées sur ce corps par les forces auxquelles il est soumis. La question consiste à déterminer le mouvement du corps lorsque la vitesse initiale et les forces sont données. Quelquefois aussi l'on considère le problème inverse, c'est-à-dire que le mouvement du corps étant donné, on demande quelle vitesse initiale lui a été imprimée, et quelles sont les forces dont il a ressenti l'action.

L'analyse différentielle est éminemment propre à la résolution de ces questions, parce qu'elle donne le moyen d'exprimer immédiatement des relations générales toujours subsistantes entre les fonctions du temps qui représentent les coordonnées variables du point matériel et les valeurs des forces. On a ainsi des équations différentielles du second ordre qui doivent être intégrées, et dont les intégrales se complètent par la considération particulière et spéciale de la position et de la vitesse initiales du point matériel.

136. Considérons un point matériel en mouvement, dont la masse est m, et désignons par x, y, z ses di-

stances à trois plans rectangulaires fixes au bout du temps t. Le mouvement de ce point sera donc défini, conformément à ce qui a été dit ci-dessus, par trois équations telles que

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t), \quad z=\varpi(t),$$

φ, ψ et ϖ étant des signes de fonctions; et si l'on élimine t de ces trois équations, il restera, entre les coordonnées x, y, z, deux équations qui appartiendront évidemment à la ligne droite ou courbe décrite par le mobile. Il s'agit de reconnaître la nature du mouvement représenté par ces trois équations, c'est-à-dire quelles sont, à la fin du temps quelconque t, la direction de la ligne décrite par le point matériel et sa vitesse, et quelles sont la direction de la force qui lui est appliquée et l'intensité de cette force.

137. Supposons d'abord

$$x=A+at, \quad y=B+bt, \quad z=C+ct,$$

les lettres A,B,C, a,b,c désignant des constantes. Il est visible que A,B,C sont les trois coordonnées du lieu où se trouve le point matériel à l'instant où l'on commence à compter le temps t; et l'on n'altérera pas le phénomène en transportant dans ce lieu l'origine des coordonnées, ce qui permettra d'écrire les équations plus simples

$$x=at, \quad y=bt, \quad z=ct.$$

Elles indiquent que les trois projections du point matériel sur les axes se meuvent sur ces axes d'un mouvement uniforme dont les constantes a, b, c représentent les vitesses.

De plus on en déduit, en éliminant t,

$$y=\frac{b}{a}x, \qquad z=\frac{c}{a}x$$

pour les équations de la ligne décrite par le point matériel. Cette ligne est donc droite, et ses projections sur les plans des xy et des xz forment avec l'axe des x des angles dont les tangentes sont représentées respectivement par $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$. La distance du point matériel à l'origine des coordonnées à la fin du temps t est

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=t\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

d'où l'on conclut que ce point se meut en ligne droite d'un mouvement uniforme dont la vitesse est $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Enfin la direction du mouvement du point matériel forme avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Le point matériel se mouvant d'ailleurs en ligne droite, d'un mouvement uniforme, il est visible qu'aucune force ne sollicite ce point : sa vitesse actuelle lui a été imprimée avant l'instant d'où l'on commence à compter le temps.

138. On voit par ce qui précède comment les trois vitesses a, b, c du corps dans le sens de chaque axe forment la vitesse effective de ce corps $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Les trois vitesses a, b, c peuvent être regardées comme les

composantes de la vitesse du corps, et réciproquement la vitesse $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ est la *résultante* des trois vitesses a, b, c. Les vitesses se composent et se décomposent suivant les mêmes lois que les forces dans la statique, ainsi que cela résulte évidemment de ce qui vient d'être exposé.

En effet, V, V' représentant deux vitesses dans le sens de deux lignes qui forment avec trois axes rectangulaires les angles α, β, γ, et α', β', γ', on peut les regarder comme l'équivalent de trois vitesses dirigées suivant ces axes, et dont les valeurs sont respectivement $V\cos.\alpha$, $V\cos.\beta$, $V\cos.\gamma$ pour la première, et $V'\cos.\alpha'$, $V'\cos.\beta'$, $V'\cos.\gamma'$ pour la seconde. Soit U la vitesse résultante, et λ, μ, ν les angles que sa direction forme avec les axes. Cette vitesse U sera également équivalente à trois vitesses dirigées suivant les axes et représentées par $U\cos.\lambda$, $U\cos.\mu$, $U\cos.\nu$. Donc on aura

$$U\cos.\lambda = V\cos.\alpha + V'\cos.\alpha',$$
$$U\cos.\mu = V\cos.\beta + V'\cos.\beta',$$
$$U\cos.\nu = V\cos.\gamma + V'\cos.\gamma';$$

relations d'où l'on conclut facilement que la vitesse U est représentée en grandeur et en direction par la diagonale du parallélogramme construit sur les vitesses V et V'.

139. Considérons maintenant les expressions générales

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad z = \varpi(t),$$

et proposons-nous d'abord de trouver l'expression de la vitesse du point matériel au bout du temps t, et la direction du mouvement de ce point. Il résulte du n° 109

qu'en désignant respectivement par u, v, w les vitesses des projections du point matériel sur les axes des x, des y et des z à la fin du temps t, on aura

$$u=\frac{dx}{dt},\qquad v=\frac{dy}{dt},\qquad w=\frac{dz}{dt},$$

les coefficients différentiels $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ étant déduits des équations précédentes. Or la vitesse du point matériel à la fin du temps t n'est autre chose que la vitesse résultante des trois vitesses u, v, w. Donc cette vitesse est exprimée par

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

conformément à ce qu'on a vu dans les numéros précédents ; et la direction de la ligne décrite forme avec les axes des x, des y et des z, dans le lieu où le point matériel est situé à la fin du temps t, des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)}}.$$

140. Proposons-nous en second lieu de connaître la grandeur et la direction de la vitesse acquise dans l'unité de temps, à la fin du temps t, par le point matériel, et par conséquent la force par laquelle ce point est sollicité. Il est visible, d'après les principes employés dans les n°s 109 et 110, que, pour connaître la vitesse cherchée, il faut considérer l'altération subie par le mouvement du point pendant le temps infiniment petit dt. Or la vitesse acquise pendant l'instant dt qui suit le temps t n'est autre chose que la vitesse qui, étant composée avec la vitesse actuelle $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$, donnerait la vitesse qui a lieu à la fin du temps $t+dt$. Donc les composantes dans le sens des axes des x, des y et des z de cette vitesse acquise pendant l'élément dt ne sont autre chose que les accroissements des vitesses u, v, w, qui ont lieu pendant cet élément du temps, c'est-à-dire du, dv, dw. On en conclut que $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ représentent respectivement les composantes dans le sens de chaque axe de la vitesse que le point matériel acquiert dans l'unité de temps, à la fin du temps t. La valeur de cette vitesse est donc exprimée par

$$\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2},$$

ou

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

le temps t étant pris pour la variable indépendante; et sa direction forme avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

Si l'on représente par m la masse du point matériel, la quantité de mouvement acquise par ce point dans l'unité du temps, à la fin du temps t, est donc

$$m\sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2},$$

ou

$$m\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2};$$

et conformément aux n°s 103 et suivants, ces expressions représentent en unités de poids l'effort exercé à la fin du temps t par la force qui sollicite le point matériel. La direction de cet effort forme avec les axes des angles dont les cosinus sont donnés par les expressions précédentes. On remarquera d'ailleurs que cet effort équivaut à trois autres qui seraient dirigés respectivement dans le sens des axes des x, des y et des z, et dont les valeurs seraient respectivement

$$m\frac{du}{dt},\ m\frac{dv}{dt},\ m\frac{dw}{dt},$$

ou $$m\frac{d^2x}{dt^2},\ m\frac{d^2y}{dt^2},\ m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ainsi ces expressions donnent en général les composantes dans le sens des axes des efforts exercés sur le point matériel.

141. Les résultats qui viennent d'être exposés permettent d'établir facilement dans tous les cas des équations exprimant les relations existantes entre les valeurs des forces qui impriment ou modifient le mouvement du point matériel, et les fonctions du temps par lesquelles les espaces parcourus en vertu de ce mouvement sont représentés. Supposons en effet qu'un point matériel dont la masse est m soit soumis à l'action de plusieurs forces, et imaginons chacune de ces forces décomposée en trois autres dirigées parallèlement aux axes des x, des y et des z. Les composantes dirigées dans le sens de chaque axe s'ajoutant entre elles, toutes les forces seront réduites à trois forces rectangulaires, et en donnant pour chaque instant ces trois forces, les actions par lesquelles le point matériel est sollicité se trouveront entièrement définies. Nous représenterons par X, Y, Z les valeurs exprimées en unités de poids des efforts exercés à la fin du temps t sur le point matériel, en vertu de l'action des trois forces dont il s'agit, dans le sens des x, des y et des z. Les quantités X, Y, Z doivent être regardées en général comme des fonctions dépendantes du temps et des coordonnées x, y, z qui fixent la position actuelle du point matériel. On aura donc, conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent, les trois équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y,\qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

qui expriment les conditions générales du mouvement de ce point.

Ces équations peuvent également s'écrire

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m},$$

et il est visible que les quantités $\frac{X}{m}, \frac{Y}{m}, \frac{Z}{m}$ sont les valeurs des vitesses que pourraient imprimer dans l'unité de temps au point matériel les trois forces par lesquelles il est sollicité. Par conséquent, lorsque ces forces seront données en exprimant les vitesses qu'elles sont capables d'imprimer dans l'unité de temps au point matériel, les équations générales du mouvement s'obtiendront en égalant respectivement les coefficients différentiels $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ aux vitesses que les forces agissant sur le point matériel lui impriment dans l'unité de temps dans le sens des x, des y et des z.

Propriétés générales du mouvement d'un point matériel. — Conservation du mouvement rectiligne

142. Les équations du mouvement d'un point matériel expriment diverses propriétés ou principes généraux dont la considération est très-importante, surtout lorsqu'on les étend, comme cela sera fait par la suite, au mouvement d'un système formé de plusieurs points matériels assujettis les uns aux autres, et sollicités par des forces.

Supposons en premier lieu qu'aucune force ne soit appliquée au point matériel : les équations dont il s'agit se réduiront à

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=0;$$

d'où l'on déduit en intégrant une première fois

$$\frac{dx}{dt}=a, \qquad \frac{dy}{dt}=b, \qquad \frac{dz}{dt}=c,$$

a,b,c désignant des constantes arbitraires. On en conclut qu'aucune force n'étant appliquée au point matériel, ses trois vitesses dans le sens de chaque axe, dont a,b,c représentent les valeurs, sont constantes; d'où il suit que ce point se meut en ligne droite d'un mouvement uniforme.

Une seconde intégration donne

$$x=A+at, \qquad y=C+bt, \qquad z=C+ct,$$

A,B,C désignant trois nouvelles constantes arbitraires qui représentent évidemment les coordonnées de la position du point matériel correspondant à $t=o$. Si l'on supposait $a=o$, $b=o$, $c=o$, les valeurs x,y,z se réduiraient aux trois constantes A,B,C.

Ces résultats n'apprennent ici rien de nouveau : on vérifie seulement que les équations générales expriment, comme cela doit être, la propriété des corps désignée dans le n° 102 par le mot d'inertie.

Conservation du mouvement de rotation. Principe des aires.

143. Reprenons les trois équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z:$$

on en déduira facilement les suivantes,

$$m\frac{yd^2x-xd^2y}{dt^2}=Xy-Yx,$$

$$m\frac{xd^2z-zd^2x}{dt^2}=Zx-Xz,$$

$$m\frac{zd^2y-yd^2z}{dt^2}=Yz-Zy,$$

lesquelles peuvent s'écrire

$$m\frac{d(ydx-xdy)}{dt^2}=Xy-Yx,$$

$$m\frac{d(xdz-zdx)}{dt^2}=Zx-Xz,$$

$$m\frac{d(zdy-ydz)}{dt^2}=Yz-Zy.$$

Or, les derniers membres de ces équations seront nuls dans deux cas : 1° Si les forces X, Y, Z sont nulles, comme on l'a supposé dans le n° précédent ; 2° si la force qui sollicite le point matériel, et dont X, Y, Z sont les composantes dans le sens des axes, est constamment dirigée vers l'origine des coordonnées (comme cela aurait lieu si cette force était le résultat d'une attraction ou d'une répulsion émanant de ce point). En admettant donc que l'on soit dans l'un ou l'autre des cas dont il s'agit, les équations précédentes se réduiront à

$$\frac{d(ydx-xdy)}{dt^2}=0,\quad \frac{d(xdz-zdx)}{dt^2}=0,\quad \frac{d(zdy-ydz)}{dt^2}=0,$$

et intégrant une première fois, on en déduira

$$\frac{ydx-xdy}{dt}=n,\quad \frac{xdz-zdx}{dt}=m,\quad \frac{zdy-ydz}{dt}=l,$$

n, l, m désignant des constantes arbitraires.

On conclut immédiatement de ces équations que la ligne décrite par le point matériel est alors comprise dans un plan passant par l'origine des coordonnées ; car si on les ajoute après les avoir multipliées respectivement par z, y et x, il viendra

$$0 = lx + my + nz,$$

relation à laquelle les coordonnées du point matériel doivent constamment satisfaire.

Considérons de plus la ligne droite tracée dans ce plan, de l'origine des coordonnées au point dont les coordonnées sont x, y, z, et où le point matériel est situé à la fin du temps t. Désignons par r la longueur à la fin du temps t de la ligne dont il s'agit, dont la direction change à chaque instant par l'effet du mouvement du point matériel, et que l'on nomme *rayon vecteur*. Soit $d\omega$ l'angle infiniment petit compris entre les positions du rayon vecteur qui ont lieu à la fin du temps t et du temps $t+dt$. La longueur de ce rayon devient $r+dr$ à la fin du temps $t+dt$, et si l'on désigne par ds l'arc décrit par le point matériel dans l'élément du temps dt, on aura évidemment $r^2 d\omega^2 = ds^2 - dr^2$, ou

$$d\omega^2 = \frac{r^2 ds^2 - (xdx + ydy + zdz)^2}{r^4}.$$

Or, l'aire triangulaire infiniment petite décrite dans l'espace par le rayon vecteur r pendant l'élément du temps dt est $\frac{1}{2} r^2 d\omega$: donc la valeur de cette aire est

$$\frac{1}{2} \sqrt{r^2 ds^2 - (xdx + ydy + zdz)^2},$$

expression qui revient à

$$\frac{1}{2}\sqrt{(ydx-xdy)^2+(xdz-zdx)^2+(zdy-ydz)^2}.$$

Il est évident d'ailleurs que si le rayon r se trouvait dirigé dans le plan des xy, des xz ou des yz, cette formule générale donnerait $\frac{1}{2}(ydx-xdy)$, $\frac{1}{2}(xdz-zdx)$ ou $\frac{1}{2}(zdy-ydz)$ pour les aires que ce rayon décrirait alors dans ces plans pendant le temps dt; ou, si l'on veut, ces trois quantités représentent respectivement les aires décrites pendant le temps dt sur les plans des xy, des xz et des yz par les projections du rayon vecteur sur ces mêmes plans. Ainsi, nous trouvons, comme cela doit être, que l'aire décrite dans l'espace par le rayon vecteur dirigé au point matériel est égale à la racine carrée de la somme des carrés des trois projections de cette aire sur les plans coordonnés.

Mais il résulte des équations obtenues ci-dessus que les rapports des projections de l'aire élémentaire $\frac{1}{2}r^2.d\omega$ sur les plans coordonnés à l'élément du temps dt conservent toujours des valeurs constantes. Donc cette aire elle-même conserve aussi avec l'élément du temps dt pendant lequel elle est décrite un rapport constant. Ainsi l'on conclut de ce qui précède que lorsqu'un point matériel en mouvement n'est soumis à l'action d'aucune force, ou n'est sollicité que par une force quelconque émanant d'un centre fixe, ce point se meut constamment dans un plan passant par ce centre fixe, de manière que le rayon vecteur dirigé du centre fixe sur le point mobile décrit

des aires égales en temps égaux. Les constantes n, m, l représentent les doubles des aires décrites dans chaque unité de temps par les projections du rayon vecteur sur les plans des xy, des xz et des yz, et l'aire décrite par le rayon vecteur même dans l'unité de temps est

$$\frac{1}{2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}.$$

Les cosinus des angles formés avec les axes des x, des y et des z par la normale au plan dans lequel se meut le point matériel sont représentés par

$$\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \qquad \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \qquad \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Réciproquement, lorsqu'un point matériel se meut dans un plan de manière que son rayon vecteur dirigé sur un point fixe pris dans ce plan, décrit des aires égales dans chaque unité de temps, la force par laquelle ce point matériel est sollicité (si elle n'est pas nulle) est nécessairement dirigée constamment dans le sens du rayon vecteur : c'est ce qu'on nomme une *force centrale*.

Conservation de la force vive.

144. Si les équations générales du n° 142

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z,$$

sont multipliées respectivement par dx, dy, dz, et ajoutées entre elles, elles donneront

$$m\frac{dx.d^2x+dy.d^2y+dz.d^2z}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz;$$

ou en nommant comme ci-dessus ds l'espace décrit par le point matériel pendant l'élément du temps dt,

$$m\frac{ds\,d^2s}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz;$$

et en intégrant il viendra

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=C+2\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

C désignant une constante arbitraire.

La nature de cette équation et la propriété qu'elle exprime doivent être considérées avec attention. Remarquons d'abord qu'en désignant par R la force appliquée au point matériel dont X, Y, Z sont les composantes dans le sens des axes ; par r la distance à laquelle le point matériel se trouve à la fin du temps t d'un certain point fixe pris sur la direction de cette force R, et par conséquent par dr l'espace que le point matériel décrit dans le sens de cette même direction en même temps qu'il décrit les espaces dx, dy, dz dans le sens des axes, on aura toujours d'après le n° 29, $Rdr=Xdx+Ydy+Zdz$. On peut donc écrire au lieu de l'équation précédente

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=C+2\int Rdr.$$

La constante C se déterminera d'après l'état du corps à un instant donné. Si nous représentons par $\frac{dt}{ds_0}$ la valeur de la vitesse $\frac{ds}{dt}$ à l'instant où r avait la valeur r_0, nous aurons évidemment

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2\int_{r_0}^{r} \mathrm{R}dr.$$

Cela posé, 1° on appelle *force vive* d'un corps en mouvement le produit de sa masse par le carré de sa vitesse actuelle.

2° Lorsqu'un corps en mouvement est sollicité par une force, on nomme *quantité d'action élémentaire* le produit de l'effort R exercé par la force et de l'espace infiniment petit dr décrit pendant l'élément du temps dt par le point matériel dans le sens de la direction de la force, et *quantité d'action* l'intégrale $\int_{r_0}^{r} \mathrm{R}dr$ exprimant la somme des quantités d'action élémentaires qui ont été produites pendant que le point matériel a décrit l'espace $r-r_0$ dans le sens de la direction de la force.

La propriété exprimée par l'équation précédente consiste donc en ce que, dans un temps donné quelconque, l'accroissement de la force vive du point matériel est toujours numériquement égal au double de la quantité d'action produite dans le même temps par la force qui sollicite ce point.

145. Lorsque la force R est constante, on a simplement

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2\mathrm{R}(r-r_0):$$

l'accroissement de la force vive du point matériel dans un temps donné est égal au double du produit de l'effort R par l'espace parcouru dans le même temps par le point matériel dans le sens de cet effort.

Lorsque la force R est donnée en fonction de la dis-

tance r seulement, la quantité Rdr peut toujours être regardée comme la différentielle d'une certaine fonction Π de r, en sorte qu'on aurait $Rdr = d\Pi$. L'équation du n° précédent devient alors

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2(\Pi - \Pi_0),$$

en désignant par Π_0 la valeur de la fonction Π qui répond à $r = r_0$. La valeur de la force vive du point matériel qui a lieu à la fin du temps t, et par conséquent la vitesse de ce point, dépendent donc uniquement de la nature de la fonction Π, et de la valeur de la distance r à la fin du temps t. Elles ne dépendent nullement de la figure de la ligne qui a été décrite pendant ce temps par le point matériel. Lorsque dans son mouvement ce point s'approche et s'éloigne alternativement du point fixe pris sur la direction de la force à partir duquel la distance r est comptée, la valeur de la vitesse se retrouve toujours la même lorsque la distance r reprend la même valeur. Le point matériel revenant à son point de départ regagne en se mouvant dans le sens de la force la vitesse qu'il a perdue en se mouvant en sens contraire de l'action de la force, et réciproquement. C'est en cela que consiste la conservation de la force vive.

Lorsque la force R n'est pas donnée uniquement en fonction de la distance r, l'intégrale $\int Rdr$ ne peut pas être prise immédiatement, et la valeur de la vitesse du point matériel n'est pas donnée par la seule connaissance de la distance r. La proposition énoncée à la fin du n° précédent subsiste toujours; mais il n'existe plus de conservation de la force vive.

IX. Mouvement d'un point matériel sollicité par des forces quelconques et assujetti a se mouvoir sur une ligne ou sur une surface données.

146. Soit d'abord un point matériel sollicité par des forces quelconques, et assujetti à se mouvoir sur une ligne quelconque donnée et maintenue dans une position fixe. La question consiste 1° à déterminer le mouvement du point matériel; 2° à connaître l'effort qui sera exercé contre la ligne maintenue fixe, dans chacune des positions occupées successivement par ce point.

Quelles que soient les forces appliquées au point matériel, on peut toujours les remplacer par une seule force R, dont nous représenterons comme dans le n° 141 les composantes dans le sens des x, des y et des z, par X, Y, Z. Et nous remarquerons en premier lieu que cette force R se décompose nécessairement elle-même en deux autres, l'une P dirigée dans le sens de la tangente menée à la courbe donnée dans le lieu où se trouve le point matériel, et l'autre Q perpendiculaire à cette tangente. Cette dernière force Q est évidemment détruite par la résistance de la courbe, et n'exerce aucune action pour produire le mouvement du point matériel. La force P, au contraire, n'exerce aucune action sur la courbe, et imprime au point matériel son mouvement. En désignant d'ailleurs par x, y, z les coordonnées du lieu où se trouve le point matériel à la fin du temps t, et par ds l'élément de la courbe qui répond aux éléments dx, dy, dz parcourus dans le sens des axes pendant le temps dt par le point matériel, on aura évidemment

$$P = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}.$$

Quant à la force Q, ses composantes dans le sens des axes des x, des y et des z seront respectivement

$$X - P\frac{dx}{ds}, \quad Y - P\frac{dy}{ds}, \quad Z - P\frac{dz}{ds}.$$

Ainsi les forces P, Q dont il s'agit seront facilement exprimées lorsqu'on aura donné les forces X, Y, Z.

En second lieu, à l'égard de la résistance opposée par la courbe, dont la direction est nécessairement perpendiculaire à cette courbe, on peut également la concevoir décomposée en deux forces : la première détruit la force Q et lui est égale et directement opposée ; la seconde est une force inconnue, à l'égard de laquelle on sait seulement que sa direction est perpendiculaire à la courbe, et qu'il s'agit de déterminer. Nous désignerons par N cette seconde force, et par l, m, n les angles que sa direction forme avec les axes des x, des y et des z. L'existence de la partie N de la résistance de la courbe est l'effet de l'inertie du point matériel, qui tend constamment à sortir de la courbe dans laquelle il est retenu, et à continuer son mouvement en ligne droite avec sa vitesse actuelle. De plus, comme la force Q et la partie de la résistance qui lui est opposée se détruisent mutuellement, le mouvement du point matériel est uniquement produit ou modifié par les forces P et N. La force N se déterminera évidemment par cette condition que le point matériel étant supposé entièrement libre, et sollicité par les deux forces P et N, ce point prenne en vertu de l'action de ces deux forces le même mouvement qu'il prend effectivement dans la courbe donnée.

Cela posé, remarquons que la vitesse du point matériel à la fin du temps t est $\frac{ds}{dt}$, dont les composantes dans le sens des axes des x, des y et des z, sont respectivement

$$\frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds},\ \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds},\ \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds}.$$

Ainsi le point matériel acquiert pendant l'élément du temps dt dans le sens des axes des vitesses respectivement égales aux différentielles de ces quantités, c'est-à-dire à

$$\frac{d^2s}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{ds}{dt}.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\quad \frac{d^2s}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{dt}.d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$
$$\frac{d^2s}{dt}\frac{dz}{ds}+\frac{ds}{dt}.d\left(\frac{dz}{ds}\right);$$

et ces différentielles étant divisées par dt donneront les vitesses acquises à la fin du temps t, pendant l'unité de temps dans le sens de chaque axe. Il résulte de là, conformément aux principes établis dans l'article précédent, qu'en désignant par m la masse du point matériel supposé libre et sollicité par les forces P et N, on a pour exprimer les conditions de son mouvement les équations

$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dx}{ds}+\frac{ds}{dt^2}\,d\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]=\mathrm{P}\frac{dx}{ds}+\mathrm{N}\cos.l$$
$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dy}{ds}+\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)\right]=\mathrm{P}\frac{dy}{ds}+\mathrm{N}\cos.m$$
$$m\left[\frac{d^2s}{dt^2}\frac{dz}{ds}+\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]=\mathrm{P}\frac{dz}{ds}+\mathrm{N}\cos.n.$$

147. Nous remarquerons que la direction de la force N étant perpendiculaire à la courbe on a nécessairement la relation

$$\frac{dx}{ds}\cos.l+\frac{dy}{ds}\cos.m+\frac{dz}{ds}\cos.n=0.$$

De plus, les quantités $d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$ sont respectivement proportionnelles aux cosinus des angles formés avec les axes par le rayon du cercle osculateur de la courbe, comme on le voit par le n° 237 des *Leçons d'analyse* : donc on a également la relation

$$\frac{dx}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

D'après cela, si l'on multiplie respectivement les équations précédentes par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, et si on les ajoute, on trouvera

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=\mathrm{P}.$$

Le point matériel sollicité par la force P, qui est constamment dirigée dans le sens de la courbe, se meut donc en suivant cette courbe comme il se mouvrait en suivant une ligne droite dans le sens de laquelle la même force P serait constamment dirigée.

Cette équation peut d'ailleurs s'écrire

$$m\frac{dsd^2s}{dt^2}=\mathrm{P}ds, \quad \text{ou} \quad m\frac{dsd^2s}{dt^2}=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz,$$

ou bien encore

$$m\frac{dsd^2s}{dt^2}=\mathrm{R}dr,$$

dr désignant dans le n° 144 l'espace parcouru pendant l'élément du temps dt par le point matériel suivant la

direction de la force R dont X, Y, Z sont les composantes. On en tire comme dans ce numéro

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2 = 2\int_{r_0}^{r} R\,dr;$$

d'où l'on conclut que les propositions énoncées dans les n°s 144 et 145 subsistent également dans le cas où le point matériel est assujetti à se mouvoir dans une courbe quelconque maintenue dans une position fixe. Si le point matériel n'est sollicité par aucune force, sa vitesse se conserve sans altération. De plus, l'accroissement de la force vive, qui a lieu dans un temps donné, est toujours égal au double de la quantité d'action imprimée pendant ce temps par la force qui agit sur le point matériel, ce qui tient à ce que les forces qui représentent la résistance de la courbe produisent toujours des quantités d'action nulles, puisque les espaces décrits dans chaque élément du temps par le point matériel suivant la direction de ces forces ont toujours des valeurs nulles.

148. D'après l'équation $m\frac{d^2s}{dt^2} = P$ qui vient d'être obtenue, les trois équations posées à la fin du n° 146 se réduisent à

$$m\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dx}{ds}\right) = N\cos.l,$$

$$m\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dy}{ds}\right) = N\cos.m$$

$$m\frac{ds}{dt^2}.d\left(\frac{dz}{ds}\right) = N\cos.n,$$

et peuvent s'écrire, ρ désignant le rayon du cercle osculateur de la courbe

$$m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\mathrm{N}\cos.l,$$

$$m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)=\mathrm{N}\cos.m,$$

$$m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\mathrm{N}\cos.n.$$

En élevant ces équations au quarré et les ajoutant, on trouvera

$$\mathrm{N}=m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2;$$

et par conséquent

$$\cos.l=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dx}{ds}\right),\quad \cos.m=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dy}{ds}\right),\quad \cos.n=\frac{\rho}{ds}.d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

ou en ayant égard aux expressions de $\cos.\lambda$, $\cos.\mu$, $\cos.\nu$ données n° 237 des *Leçons d'analyse*,

$$\cos.l=\cos.\lambda,\qquad \cos.m=\cos.\mu,\qquad \cos.n=\cos.\nu.$$

Ainsi la direction de la force N coïncide constamment avec celle du rayon du cercle osculateur de la courbe dans laquelle se meut le point matériel, et cette force agit de manière à tendre à rapprocher ce point du centre de courbure. Elle dépend uniquement de la vitesse du point matériel et de la grandeur du rayon de courbure qui ont lieu dans chaque point de la courbe.

On voit d'après ce résultat que la tendance du point matériel à conserver la direction actuelle de son mouvement, produit contre la courbe dans laquelle ce point est retenu un effort dirigé constamment dans le sens du rayon de courbure de cette courbe. Cet effort, appelé *force centrifuge* parce que le point matériel tend tou-

jours à s'éloigner du centre de courbure, est détruit par la résistance de la courbe. Sa valeur est représentée en unité de poids par l'expression $m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, en sorte qu'il est capable d'imprimer au point matériel, dans l'unité de temps, une vitesse égale à $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, c'est-à-dire égale au quarré de la vitesse actuelle du point matériel divisé par le rayon de courbure de la courbe.

Remarque relative au mouvement d'un point matériel entièrement libre.

149. Lorsqu'un point matériel, par l'effet d'une cause quelconque, se meut en ligne courbe, la force centrifuge subsiste. Si ce point est retenu dans une courbe donnée, cette force centrifuge est détruite par la résistance de la courbe. Si le point matériel se meut librement, la force centrifuge doit être détruite par les forces mêmes qui sont appliquées à ce point. On conçoit d'après cela que le mouvement libre d'un point matériel doit être assujetti à cette condition, que les forces qui lui sont appliquées puissent toujours être remplacées par deux forces seulement, l'une dirigée dans le sens de la tangente et l'autre dirigée dans le sens du rayon de courbure de la ligne qu'il décrit, dont la première produise le mouvement du point matériel dans le sens de cette ligne, et dont la seconde détruise la force centrifuge.

En effet, supposons la force R appliquée au point matériel décomposée en deux autres forces, l'une R′ dirigée suivant la tangente de la courbe, l'autre R″ dirigée

suivant le rayon de courbure. Les équations générales du n° 142 deviendront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=R'.\frac{dx}{ds}+R''.\frac{\rho}{ds}d\left(\frac{dx}{ds}\right),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2}=R'.\frac{dy}{ds}+R''.\frac{\rho}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=R'.\frac{dz}{ds}+R''.\frac{\rho}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right),$$

et il s'agit d'en déduire les valeurs de R′ et R″. Or en multipliant d'abord chaque équation par le coefficient de R′ dans cette même équation et ajoutant, le terme contenant R″ sera nul puisque la direction de cette force forme avec celle de R′ un angle droit, et il viendra simplement

$$m\frac{1}{dt^2}.\frac{dx.d^2x+dy.d^2y+dz.d^2z}{ds}=R', \quad \text{ou} \quad m\frac{d^2s}{dt^2}=R',$$

en sorte que la force R′ ne diffère point de la force qui a été désignée par P dans le n° 146.

150. Si l'on multiplie ensuite chaque équation par le coefficient de R″ dans cette même équation, et si on les ajoute, le coefficient de R′ sera nul à son tour, et l'on aura

$$m\frac{1}{dt^2}\frac{\rho}{ds}\left[d^2x.d\left(\frac{dx}{ds}\right)+d^2y.d\left(\frac{dy}{ds}\right)+d^2z.d\left(\frac{dz}{ds}\right)\right]=R'',$$

ou

$$m\frac{1}{dt^2}\frac{\rho}{ds^2}\left[(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2-(d^2s)^2\right]=R'',$$

ou enfin (en ayant égard à l'expression de ρ donnée n° 237 des *Leçons d'analyse*),

$$m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = R'' :$$

la force R″ est donc égale à celle qui a été désignée par N dans le n° 146.

Mouvement d'un point matériel sur une surface donnée.

151. Considérons maintenant un point matériel sollicité par des forces quelconques et assujetti à se mouvoir sur une surface donnée maintenue dans une position fixe. La question consiste à déterminer 1° la ligne décrite par le point matériel sur la surface (ligne que l'on nomme en général *trajectoire*) et le mouvement du point dans le sens de cette ligne ; 2° la pression exercée par le point matériel contre la surface, qui est nécessairement dirigée perpendiculairement à cette surface.

Nous désignerons, comme dans le n° 146, par R la force agissant à la fin du temps t sur le point matériel, et par X, Y, Z les composantes de cette force dans le sens des axes des x, des y et des z. L'équation de la surface que le point est assujetti à décrire sera représentée en général par

$$z = f(x, y),$$

et les coordonnées de la trajectoire devront satisfaire à cette équation. Nous désignerons par N la résistance de la surface à la pression qu'elle supporte, et nous remarquerons que la force R se décompose nécessairement en deux autres, l'une dirigée perpendiculairement à la surface, et qui se trouve détruite ; l'autre dirigée dans le plan tangent à la surface, et qui seule agit pour produire le mouvement du point matériel. La force N doit

d'abord détruire la première des deux forces dont on vient de parler; de plus, elle doit balancer l'effet de l'inertie du point matériel qui tend sans cesse à sortir de la surface dans laquelle il est retenu. On sait que la direction de la force N est perpendiculaire à la surface, et on en déterminera complétement la valeur d'après cette condition que le point matériel supposé entièrement libre étant soumis à l'action des deux forces R et N, ce point prenne le même mouvement qu'il prend effectivement dans la surface donnée.

D'après cela, en se rappelant les expressions générales des cosinus des angles formés avec les axes par la normale à la surface qui ont été données n° 217 des *Leçons d'analyse*, on posera les équations.

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X-N\frac{\frac{dz}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y-N\frac{\frac{dz}{dy}}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+N\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}};$$

qui, réunies à l'équation de la surface $z=f(x,y)$, doivent servir à déterminer le mouvement du point matériel et la résistance de la surface désignée par N. Dans ces équations, les coordonnées x,y,z appartiennent au point de la surface où se trouve placé le point matériel à

la fin du temps t; $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ représentent les valeurs que prennent en ce point les coefficients différentiels de la fonction z déduits de l'équation $z=f(y,x)$.

152. Cela posé, soit ds l'élément de la trajectoire du point matériel décrit pendant l'élément du temps dt, dont les projections sur les axes sont représentées respectivement par dx, dy, dz. Cet élément forme un angle droit avec la normale à la surface. Par conséquent, si l'on multiplie respectivement les équations précédentes par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et si on les ajoute, le terme contenant N disparaîtra, et il viendra

$$m\frac{dxd^2x+dyd^2y+dzd^2z}{dt^2}=Xdx+Ydy+Zdz,$$

ou (comme au n° 147),

$$m\frac{dsd^2s}{dt^2}=Rdr,$$

d'où l'on déduit

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2=2\int_{r_0}^{r}Rdr.$$

Ainsi les propositions des n°s 144 et 145 relatives au mouvement d'un point matériel libre conviennent également au mouvement d'un point matériel assujetti à se mouvoir dans une surface donnée. L'accroissement de la force vive dans un temps donné est toujours égal au double de la quantité d'action produite par les forces agissant sur le point matériel. Si le point matériel n'est sollicité par aucune force, sa vitesse initiale se conserve sans altération.

153. Quant à la ligne décrite par le point matériel, nous remarquerons qu'en éliminant N entre les trois équations du n° 151, on trouve les deux suivantes,

$$d^2x+\frac{dz}{dx}d^2z=\frac{ds^2\left(X+\frac{dz}{dx}Z\right)}{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2},$$

$$d^2y+\frac{dz}{dy}d^2z=\frac{ds^2\left(Y+\frac{dz}{dy}Z\right)}{m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2},$$

dans lesquelles on pourra remplacer $m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ par l'expression $m\left(\frac{ds_0}{dt}\right)^2+\int_{r_0}^{r}Rdr$ trouvée ci-dessus. Mettant de plus à la place de z sa valeur en x et y tirée de l'équation de la surface, les deux équations précédentes ne contiendront plus que ces deux variables. Elles pourront servir à déterminer la projection de la trajectoire demandée sur le plan des xy lorsque la vitesse initiale du point matériel aura été donnée en grandeur et en direction.

154. Enfin, quant à la pression normale représentée par N, si l'on multiplie chacune des trois équations du n° 151 par le coefficient de N dans cette équation, et si l'on ajoute, il viendra

$$N=-\frac{-\frac{dz}{dx}X-\frac{dz}{dy}Y+Z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}-m\frac{1}{dt^2}\frac{\frac{dz}{dx}d^2x+\frac{dz}{dy}d^2y-d^2z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}.$$

Le premier terme représente évidemment une force égale et directement opposée à la composante de la force R dirigée dans le sens de la normale à la surface. A l'égard du second terme, il peut s'écrire

$$-m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{\rho\left(\frac{dz}{dx}d^2x+\frac{dz}{dy}d^2y-d^2z\right)}{ds^2\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}.$$

Or, d'après les expressions des cosinus des angles formés par le rayon de courbure ρ d'une courbe avec les axes, qui ont été données n° 236 des *Leçons d'analyse*, si l'on nomme ψ l'angle formé par le rayon de courbure de la trajectoire avec la normale à la surface, on aura

$$\cos.\psi=\frac{\rho}{ds}\frac{\frac{dz}{dx}.d\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dz}{dy}.d\left(\frac{dy}{ds}\right)-d\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}},$$

ou, en effectuant les différentiations indiquées, et observant que $dz=\frac{dz}{dx}dx+\frac{dz}{dy}dy$, puisque les coordonnées x,y,z doivent satisfaire à l'équation de la surface,

$$\cos.\psi=\frac{\rho}{ds^2}\frac{\frac{dz}{dx}d^2x+\frac{dz}{dy}d^2y-d^2z}{\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}.$$

On voit donc que le second terme de l'expression précédente de N peut s'écrire

$$-m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.\cos.\psi,$$

et par conséquent que ce terme représente une force égale et directement à la force centrifuge due au mouvement du point matériel dans sa trajectoire décomposée dans le sens de la normale à la surface.

Ainsi la pression normale soufferte par la surface est la somme de deux forces, dont l'une est la composante perpendiculaire à la surface de la force agissant sur le point matériel, et l'autre la composante également perpendiculaire à la surface de la force centrifuge dont ce point est animé, force qui sera connue quand la figure de la trajectoire sera déterminée.

155. Il y a deux cas particuliers qui doivent être considérés à part, celui où la force R est constamment dirigée suivant la normale à la surface sur laquelle se meut le point matériel, et celui où cette force est nulle. On a dans le premier cas $dr = o$, et dans le second cas l'on a $R = o$. L'équation obtenue n° 152 se réduit donc à $\frac{ds}{dt} = \frac{ds_0}{dt}$, d'où l'on conclut que la vitesse initiale du point matériel se conserve sans altération. Il en résulte que le rapport $\frac{ds}{dt}$ est constant, ou que l'on a $d^2s = o$.

156. Les équations de la trajectoire obtenues n° 153 deviennent dans les deux cas dont il s'agit,

$$d^2x + \frac{dz}{dx} d^2z = 0, \qquad d^2y + \frac{dz}{dy} d^2z = 0;$$

et elles indiquent que le plan osculateur de la trajectoire est ici un plan normal à la surface. En effet, en mettant pour d^2x et d^2y les valeurs données par les équations précédentes dans l'expression de $\cos\psi$ du n° 154, cette expression devient

$$\cos.\psi = -\frac{\rho}{ds^3}.d^2z.\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}.$$

Or, lorsque $d^2s=o$, la valeur de ρ se réduit à

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2}},$$

c'est-à-dire en mettant également pour d^2x et d^2y les valeurs données par les équations précédentes, à

$$\rho = \frac{ds^2}{d^2z.\sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2+1}}.$$

Donc nous avons ici $\cos\psi = -1$. Ainsi, la direction du rayon de courbure de la trajectoire coïncide constamment avec celle de la normale à la surface.

157. Il est évident d'après cela que la pression N exercée contre la surface est ici la somme de la force R et de la force centrifuge du point matériel, puisque ces deux forces sont également dirigées suivant la normale; et, par conséquent, cette pression, si aucune force n'agit sur le point matériel, se réduit à la force centrifuge.

Le caractère géométrique consistant en ce que le plan osculateur de la trajectoire est constamment normal à la surface, appartient à la courbe que l'on obtiendrait si l'on entreprenait d'appliquer sur la surface une bande d'une largeur très-petite sans duplicature. Il appartient également à la ligne suivant laquelle s'appliquerait sur la surface un fil tendu entre deux points donnés, abstraction faite de toute résistance provenant du frottement. Enfin, le caractère géométrique dont il s'agit

convient encore aux lignes tracées sur la surface de la terre par des *alignements*.

X. Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe donnée.

158. Quelle que soit la ligne décrite par un point matériel pesant, le mouvement de ce point est assujetti à la condition exprimée par l'équation

$$mv^2 - mv_0^2 = 2mg(z - z_0),$$

ou

$$v^2 - v_0^2 = 2g(z - z_0):$$

z représente la distance du point matériel au plan horizontal des xy au bout du temps t, et v la vitesse de ce point au bout de ce même temps; z_0 et v_0 sont les valeurs initiales de z et v. L'ordonnée z est comptée de haut en bas, dans le sens de l'action de la gravité; g représente la vitesse que la gravité imprime dans l'unité de temps aux corps qui cèdent librement à son action. Cette équation n'est que l'application du principe établi dans le n° 147, et qui consiste en ce que la force vive acquise par le point matériel dans un temps donné est toujours numériquement égale au double des quantités d'action produites dans le même temps par les forces qui sollicitent ce point.

Si la vitesse initiale est nulle, on a simplement

$$v^2 = 2g(z - z_0).$$

La vitesse acquise par le point matériel ne dépend donc nullement de la figure de la courbe, mais seulement de la différence de niveau entre les points de départ et d'ar-

rivée. Elle est toujours *due à cette différence de niveau*, comme si le point était tombé verticalement. (*Voyez* n° 115.)

159. Lorsqu'un point matériel pesant parcourt une courbe quelconque qui a des sinuosités dans le sens vertical, la vitesse varie continuellement, et ses maxima ou minima ont lieu dans les points de la courbe où l'ordonnée verticale z a elle-même ses maxima et minima, c'est-à-dire dans les points où la tangente de la courbe est horizontale, et où le point matériel pourrait se maintenir en équilibre.

La vitesse devient nulle lorsque le point matériel se retrouve dans le plan horizontal où il se trouvait quand il a commencé à descendre avec une vitesse nulle. Ainsi, un point matériel, par l'effet de sa vitesse acquise dans sa descente, peut toujours remonter au niveau de son point de départ.

160. Le mouvement d'un point matériel pesant dans une courbe donnée dépendant uniquement des différences de niveau de ses parties, on peut, concevant la surface cylindrique verticale qui contient cette courbe, imaginer cette surface enveloppée sur une autre surface cylindrique verticale à base quelconque. Le mouvement d'un point matériel pesant sur la nouvelle courbe obtenue de cette manière s'opérera comme sur la courbe proposée.

161. La pression exercée contre la courbe varie en général d'un point à l'autre. D'après le n° 148, elle est toujours la résultante 1° de la composante du poids mg du corps dirigée perpendiculairement à la courbe dans le plan vertical qui la touche au point où se trouve le

point matériel, 2° de la force centrifuge $\frac{mv^2}{\rho}$, ou $m\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$, qui est aussi dirigée perpendiculairement à la courbe, mais dans le plan osculateur, et qui tend à éloigner le point matériel du centre de courbure de cette courbe.

Si la courbe est tracée dans un plan vertical, les deux plans dont on vient de parler se confondent avec le plan même de la courbe, et la pression qu'elle supporte est la somme de la force centrifuge et de la composante du poids du point matériel dirigée perpendiculairement à la courbe.

162. La relation entre les espaces parcourus sur la courbe et le temps se déduit de l'expression de la vitesse du point matériel. L'équation du n° 158 donne

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2g(z - z_0), \quad \text{d'où} \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z - z_0)}},$$

équation qui donnera t en fonction de z ou de s.

163. Le cas le plus simple est celui où le point matériel se meut sur une ligne droite inclinée. Soit α l'angle formé par cette ligne avec la verticale : on aura $\frac{dx}{ds} = \sin.\alpha$ et $\frac{dz}{ds} = \cos.\alpha$. La pression exercée par le point matériel sera simplement

$$mg.\sin.\alpha.$$

L'expression précédente de dt deviendra

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g\cos.\alpha.(s - s_0)}},$$

et étant intégrée de manière que $s = s_0$ quand $t = 0$, donnera

$$t = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2g\cos.\alpha.(s - s_0)}}{g\cos.\alpha}.$$

Ce résultat ne diffère point de celui qui convient à un corps cédant librement à l'action d'une force accélératrice constante qui lui imprime dans l'unité de temps la vitesse $g\cos.\alpha$, c'est-à-dire la composante de la vitesse g dans le sens de la ligne inclinée.

164. On peut remarquer que si le corps part sans vitesse initiale de l'extrémité supérieure de la ligne inclinée, on a simplement $t = \sqrt{\frac{2s}{g\cos.\alpha}}$. Par conséquent, si l'on considérait des lignes diversement inclinées AC, AC', etc., (*fig.* 18), et qu'on voulût les assujettir à la condition qu'un point matériel partant du point A arrivât à l'extrémité de chacune dans le même temps, il faudrait leur donner des longueurs telles que le rapport $\frac{s}{\cos.\alpha}$ fût constant; d'où l'on conclut que ces lignes devraient se terminer à la circonférence d'un cercle passant par le point A.

165. Dans les cas naturels, lorsque les corps glissent le long d'une courbe en cédant à l'action de la gravité, il existe des résistances qui en altèrent les mouvements. L'hypothèse qui sera en général le moins éloignée de la vérité, quand il s'agit d'un corps solide, consiste à regarder la résistance comme due à un frottement dont l'intensité est proportionnelle à la pression exercée contre la courbe. On écrirait alors pour exprimer les condi-

tions du mouvement d'un corps pesant glissant sur une courbe contenue dans un plan vertical, l'équation

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg.\frac{dz}{ds}-f\left[mg.\frac{dx}{ds}+m\frac{1}{r}\left(\frac{ds}{dt}\right)\right],$$

f désignant le rapport du frottement à la pression.

Dans quelques cas, il pourrait être nécessaire de considérer la résistance comme dépendant de la vitesse du point matériel, et d'ajouter au second membre un terme de la forme

$$-\left[B\frac{ds}{dt}+C\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right],$$

B et C désignant des coefficients constants.

L'intégration de cette équation fera connaître la loi du mouvement.

166. Si l'on suppose, comme dans le n° 163, le point matériel assujetti à se mouvoir sur une ligne droite formant un angle α avec la verticale, l'équation précédente deviendra, en désignant toujours par v la vitesse de ce point à la fin du temps t,

$$m\frac{dv}{dt}=mg(\cos.\alpha-f\sin.\alpha)-(Bv+Cv^2).$$

Cette équation ne diffère point de celle qui a été traitée dans le n° 103. Le mouvement du point matériel sur la ligne inclinée est égal au mouvement qui aurait lieu sur une ligne verticale si la gravité était réduite dans le rapport de $\cos.\alpha-f\sin.\alpha$ à l'unité. Ce mouvement devient uniforme lorsque la valeur de la vitesse v satisfait à la relation

$$mg(\cos.\alpha-f\sin.\alpha)=Bv+Cv^2.$$

Mouvement d'un point matériel pesant dans le cercle. — Pendule circulaire.

167. Considérons un point matériel pesant assujetti à se mouvoir dans un cercle dont AB(*fig.* 19) est le diamètre vertical. Soit M la position initiale de ce point et v_0 sa vitesse initiale. En cédant à l'action de la pesanteur, il descendra sur l'arc MA. Parvenu au point inférieur A, sa vitesse sera la plus grande possible. Il montera ensuite avec une vitesse décroissante l'arc AN, et lorsqu'il arrivera en N au niveau du point de départ M, il aura la même vitesse v_0 qu'il avait en ce dernier point. Si v_0 surpasse la vitesse due à la hauteur BP, le point matériel montera de N en B, et dépassant ce point redescendra sur l'arc BMA. Dans ce cas, il continuera à parcourir dans le même sens la circonférence du cercle, les maxima et minima de la vitesse ayant lieu respectivement aux points A et B.

Mais si v_0 est nulle, ou seulement moindre que la vitesse due à la hauteur BP, le point matériel ne pourra pas monter jusques au point B. Il redescendra donc sur l'arc BNA à partir du point où sa vitesse est devenue nulle, puis remontera sur l'arc AMB jusques au niveau de ce dernier point. Le point matériel continuera ainsi à osciller dans le cercle, c'est-à-dire à parcourir alternativement en sens opposés une portion de la circonférence formée de deux arcs symétriques par rapport au diamètre vertical AB. La vitesse de ce point sera nulle aux extrémités supérieures des deux arcs, et la plus grande possible au point inférieur A. Les temps employés par le point matériel à descendre sur l'un des arcs et à monter sur l'autre seront égaux entre eux.

168. Supposons les points du cercle rapportés aux deux axes horizontal et vertical Ax, Az, passant par le point inférieur A, les z étant comptés de bas en haut. Soit M la position intiale du point matériel et z_0 l'ordonnée du point M. Admettons qu'au bout du temps t le point matériel soit parvenu au point m, dont les coordonnées sont x et z, Am sera l'arc désigné par s. Pour appliquer ici la formule du n° 162, il faudra donner aux différentielles dt et ds des signes contraires, et changer le signe de g, parce que la gravité est dirigée de manière à diminuer les z. Nous aurons donc

$$dt = -\frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2g(z_0 - z)}},$$

ou, parce que

$$ds = dz \cdot \frac{r}{\sqrt{2rz - z^2}},$$

$$dt = -\frac{r.dz}{\sqrt{(2rz - z^2)[v_0^2 + 2g(z_0 - z)]}}.$$

Ainsi l'intégrale

$$t = \int_{z_0}^{z} \frac{-r.dz}{\sqrt{(2rz - z^2)[v_0^2 + 2g(z_0 - z)]}}$$

représente le temps employé par le point matériel à parcourir l'arc Mm dont les coordonnées des points extrêmes sont z_0 et z.

169. Nous considérerons le cas où le mobile part du point M sans vitesse initiale, et nous chercherons le temps T qu'il emploie à descendre au point inférieur A. L'expression précédente donnera

$$T=\int_{z_0}^{0}\frac{-r.dz}{\sqrt{(2rz-z^2).2g(z_0-z)}},$$

qui peut s'écrire

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{(z_0z-z^2)\left(1-\frac{z}{2r}\right)}},$$

ou en développant le facteur $\left(1-\frac{z}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$T=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\int_0^{z_0}\frac{dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}\left\{1+\frac{1}{2}.\frac{z}{2r}+\frac{1.2}{2.4}\left(\frac{z}{2r}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{z}{2r}\right)^3+\text{etc.}\right\}.$$

On remarquera d'abord que

$$\int\frac{dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}=\text{arc. sin.}\ \frac{2z-z_0}{z_0},$$

par conséquent

$$\int_0^{z}\frac{dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}=\pi,$$

π représentant le rapport de la circonférence au diamètre. Quant aux intégrales relatives aux autres termes de la série, qui sont toutes de la forme

$$\int_0^{z_0}\frac{z^n dz}{\sqrt{z_0z-z^2}},$$

leurs valeurs dépendent les unes des autres et peuvent s'exprimer au moyen de la précédente, comme on l'a vu dans le n° 287 des *Leçons d'analyse*. On peut d'ail-

leurs s'en assurer d'une manière fort simple en observant que

$$d.(z^n.\sqrt{z_0z-z^2})=\left(n+\frac{1}{2}\right)z_0\frac{z^n dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}-(n+1)\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}.$$

On aura donc, en intégrant les deux membres de cette équation depuis $z=z_0$ jusqu'à $z=o$, puisque l'intégrale du premier membre est nulle entre ces limites,

$$\int_0^{z_0}\frac{z^{n+1}dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}=\frac{(2n+1)z_0}{2(n+1)}\int_0\frac{z^n.dz}{\sqrt{z_0z-z^2}}.$$

Cette relation, en faisant successivement $n=o$, $n=1$, $n=2$, etc., donnera, à partir du second, tous les termes de la série précédente, laquelle deviendra

$$T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{z_0}{2r}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{z_0}{2r}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{z_0}{2r}\right)^3+\text{etc.}\right\}.$$

Le point matériel parvenu en A emploie pour s'élever en N au niveau du point de départ M le même temps qu'il a employé à descendre de M en A. La durée d'une oscillation, c'est-à-dire le temps nécessaire pour que le point matériel parcoure l'arc MAN, est double de la valeur précédente de T.

170. Soit Ω l'angle MCA formé par le rayon CM qui répond au point de départ du point matériel avec le diamètre vertical AB. On aura

$$\frac{z_0}{2r}=\frac{1}{2}(1-\cos.\Omega),\ \text{ou}\ \frac{z_0}{2r}=\frac{1}{2}.\frac{\Omega^2}{2}\text{etc.}$$

Si l'arc Ω est très-petit, l'expression de la durée d'une

oscillation se réduira donc, en ne conservant que les deux premiers termes de la série, à

$$2T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1+\frac{\Omega^2}{16}\right);$$

et, en ne négligeant qu'une quantité très-petite du second ordre, à

$$2T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Ainsi, la durée des petites oscillations circulaires d'un point matériel est indépendante de l'amplitude de ces oscillations, propriété qui s'exprime en disant que ces oscillations sont *isochrones*, c'est-à-dire que leur durée est la même, quelle que soit leur étendue. Cette durée est égale au temps qu'emploierait un corps pesant à tomber d'une hauteur égale à la moitié du rayon du cercle multiplié par le rapport π. Une courbe quelconque pouvant être regardée comme se confondant dans une étendue très-petite avec son cercle osculateur, la formule précédente exprimera également la durée des oscillations d'un point matériel sur une courbe quelconque tracée sur un plan vertical dans une étendue très-petite de part et d'autre du point où la tangente est horizontale, r désignant le rayon de courbure dans ce point.

171. Les résultats des deux n^os^ précédents donnent la loi des oscillations de ce qu'on nomme le *pendule simple*, c'est-à-dire d'un point matériel pesant suspendu à un point fixé au moyen d'un fil inextensible et sans masse. En supposant ce point matériel placé hors de la

verticale qui passe par le point de suspension, puis abandonné sans vitesse initiale à l'action de la gravité, il fera de part et d'autre de cette verticale des oscillations circulaires, dont la durée, abstraction faite de l'effet de la résistance de l'air, est donnée par l'expression de 2T. La longueur du fil est représentée par r.

Comme il est aisé de compter le nombre des oscillations faites par un pendule dans un certain intervalle de temps, et par conséquent de connaître la durée de chacune de ces oscillations, ce genre d'observations donne une évaluation exacte de la quantité désignée par g, c'est-à-dire de la vitesse que la gravité imprime aux corps pesants, ou du double de l'espace que cette force peut leur faire parcourir dans la première unité de temps de leur chute. Mais on doit considérer que l'hypothèse du pendule simple, c'est-à-dire d'un corps dont la masse est concentrée à l'extrémité du fil de suspension, ne peut être réalisée. Il est nécessaire d'avoir égard au volume et à la figure du corps oscillant, ce qui donne lieu à une nouvelle question qui exige un principe spécial et dont on s'occupera dans la suite. Il est également nécessaire d'avoir égard à la diminution que subit dans l'air le poids des corps, à l'effet de la résistance que ce fluide oppose au mouvement du corps oscillant, à l'influence du mode de suspension, et à quelques autres circonstances.

172. En revenant à la considération du pendule simple, on peut remarquer que le fil de suspension sera constamment tendu. La tension de ce fil n'est autre chose que la pression exercée par le point matériel contre la courbe qu'il est assujetti à décrire, pression dont la va-

leur a été indiquée n° 161. Lorsque le point matériel est en m (*fig.* 19), la composante du poids mg dans le sens du rayon Cm est $mg.\frac{r-z}{r}$; et la force centrifuge de ce point matériel est $m.\frac{v^2}{r}=m.\frac{2g(z_0-z)}{r}$. La tension du fil, qui est la somme de ces deux forces, est donc exprimée par

$$mg.\frac{r+2z_0-3z}{r}.$$

Mouvement d'un point matériel pesant dans la cycloïde. — Pendule cycloïdal.

173. Soit une cycloïde DAD′ dont l'axe DD′ (*fig.* 20) est horizontal, A étant le point le plus bas de cette courbe, et AB le diamètre du cercle générateur, que nous désignerons par a. En représentant comme ci-dessus par z_0 et z les hauteurs verticales au-dessus du point A de la position initiale M du point matériel pesant et de la position m où ce point se trouve au bout du temps t, nous aurons, comme au n° 166,

$$dt=-\frac{ds}{\sqrt{v_0^2+2g(z_0-z)}},$$

s représentant l'arc Am. Mais par la nature de la cycloïde (*voyez* le n° 191 des *Leçons d'analyse*)

$$s=2\sqrt{az}, \qquad \text{et} \qquad ds=dz\sqrt{\frac{a}{z}}:$$

l'équation précédente devient donc, en supposant la vitesse initiale nulle,

$$dt = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}\frac{dz}{\sqrt{z_0 z - z^2}}.$$

En intégrant comme au n° 169, cette expression donne

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}\,\text{arc. cos.}\frac{2z - z_0}{z_0},$$

pour l'expression du temps employé par le point matériel à descendre de M en m.

Le temps T employé par ce point pour descendre de M en A est donc exprimé par

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}.$$

Ainsi, le temps de la descente d'un point matériel sur un arc de cycloïde jusqu'au point inférieur est indépendant de la longueur de cet arc. Une courbe qui a cette propriété se nomme courbe tautochrône. La propriété dont il s'agit n'appartient qu'à la cycloïde, ou aux courbes à double courbure que l'on formerait en pliant la cycloïde sur un cylindre vertical à base quelconque. Lorsque le corps, parvenu au point A, montera en M', puis oscillera en parcourant alternativement en sens opposés l'arc MAM', la durée des oscillations sera le double de l'expression précédente, c'est-à-dire égale à $\pi\sqrt{\frac{2a}{g}}$, quelle que soit l'étendue de cet arc.

174. On doit remarquer que l'expression $T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2a}{g}}$ ne diffère point du premier terme de la série obtenue n° 169, dans lequel on remplacerait r par $2a$. Ainsi, la

durée des oscillations dans la cycloïde est égale, quelle que soit leur amplitude, à la durée des oscillations très-petites d'un pendule circulaire dont la longueur serait double du diamètre du cercle générateur de cette cycloïde. De plus, si l'on place en CD et CD′ deux moitiés d'une cycloïde décrite par le même cercle générateur que la cycloïde proposée DAD′, les parties AD, AD′ de cette dernière seront respectivement les développées des arcs CD, CD′. Par conséquent, si l'on conçoit le point matériel placé à l'extrémité d'un fil parfaitement flexible attaché en C, dont la longueur soit CA ou $2a$, et qui oscille de part et d'autre de la verticale AC en développant les portions de courbe CD,CD′, ce point matériel décrira des arcs appartenant à la cycloïde DAD′; et la durée des oscillations de ce pendule cycloïdal, quelle que soit leur amplitude, est la même que la durée des oscillations très-petites du pendule circulaire dont AC est la longueur.

XI. Mouvement des projectiles dans le vide et dans un milieu résistant.

175. Considérons un point matériel sollicité par l'action verticale de la gravité, et qui aurait été lancé dans une direction et avec une vitesse données. La ligne qu'il décrira devant être comprise dans le plan vertical passant par la direction initiale de sa vitesse, il suffit de rapporter le mouvement du point matériel à une coordonnée horizontale x dirigée dans ce plan, et à une coordonnée verticale z, que nous supposerons comptée de bas en haut. Les équations du mouvement seront, en

désignant par g la vitesse que la gravité imprime aux corps pesants dans l'unité de temps,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0, \qquad \frac{d^2z}{dt^2}=-g.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{dx}{dt}=V\cos.\theta, \qquad \frac{dz}{dt}=V\sin.\theta-gt;$$

V est la vitesse initiale du point matériel ;

θ l'angle formé par la direction de V avec l'axe horizontal des x.

En intégrant une seconde fois, l'on obtient

$$x=t.V\cos.\theta,$$

$$z=t.V\sin.\theta-\frac{1}{2}gt^2.$$

On n'ajoute pas de constante, parce que l'on suppose l'origine des coordonnées placée dans la position initiale du point.

L'expression de la vitesse après le temps t est

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}=\sqrt{V^2-2V\sin.\theta.gt+g^2t^2}=\sqrt{V^2-2gz}.$$

176. On a pour l'équation de la trajectoire

$$z=x.\text{tang}.\theta-x^2.\frac{g}{2V^2\cos.^2\theta}:$$

cette courbe est donc une parabole. Les coordonnées du sommet sont

$$x=\frac{V^2\sin.2\theta}{2g} \quad \text{et} \quad z=\frac{V^2\sin.^2\theta}{2g}$$

La verticale passant par ce sommet partage la courbe en deux parties égales.

Pour déterminer la vitesse ou la direction initiales qui feraient passer la trajectoire par un point déterminé, on a

$$V=\sqrt{\frac{gx^2}{x\sin.2\theta-2z\cos.^2\theta}},\qquad \text{tang.}\theta=\frac{V^2\pm\sqrt{V^4-g^2x^2-2V^2gz}}{gx},$$

et si $z=o$,

$$V=\sqrt{\frac{gx}{\sin.2\theta}},\qquad \sin.2\theta=\frac{gx}{V^2}.$$

Il y a toujours deux directions initiales correspondantes à une amplitude donnée. La plus grande amplitude, ou la grande valeur $x=\frac{V^2\sin.^2\theta}{g}$, répond à $\theta=\frac{\pi}{2}$.

177. Les questions relatives au tir des projectiles seraient résolues d'une manière trop éloignée des effets naturels si, comme on l'a fait dans les n^{os} précédents, on négligeait entièrement la résistance de l'air. On sait que, pour les très-grandes vitesses qui doivent être considérées dans ces questions, la résistance augmente suivant une progression plus rapide que celle du carré de cette vitesse, et d'ailleurs elle dépend de la densité de l'air qui varie dans les diverses parties de la trajectoire. L'appréciation exacte de ces circonstances donnerait lieu à des calculs fort compliqués. Nous supposerons simplement ici la densité de l'air constante, et la résistance proportionnelle au carré de la vitesse du mobile. Les équations du mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\frac{dx}{ds} \qquad m\frac{d^2z}{dt^2}=-K\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\cdot\frac{dz}{ds}-mg.$$

s longueur de l'arc de la trajectoire correspondant aux coordonnées x, y;

K coefficient constant dépendant de la figure du corps et de la densité du fluide.

Ces équations peuvent s'écrire :

$$(1)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{K}{m}\frac{ds}{dt}\frac{dx}{dt},$$

$$(2)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{K}{m}\frac{ds}{dt}\frac{dz}{dt}-g.$$

Il s'agit de déduire de ces équations la figure de la trajectoire et l'expression de la vitesse du mobile en un point donné de cette courbe.

L'équation (1) donne immédiatement

$$(3)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{dx}{dt}=V\cos.\theta.e^{-\frac{K}{m}s}.$$

178. Soit fait pour abréger $\frac{dz}{dx}=q$, ou $dz=qdx$. On aura $\frac{dz}{dt}=q\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{dq}{dt}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2x}{dt^2}$, et ces valeurs mises dans l'équation (2) la changent en

$$(4)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{dq}{dt}\frac{dx}{dt}=-g;$$

ou à cause de l'équation (3)

$$(5)\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{dq}{dx}=-\frac{g}{V^2\cos.^2\theta}.e^{\frac{2K}{m}s},$$

ou

$$dq.\sqrt{1+q^2}=-\frac{g}{V^2\cos.^2\theta}ds.e^{\frac{2K}{m}s};$$

et en intégrant

$$q\sqrt{1+q^2}+l\left(q+\sqrt{1+q^2}\right)=const.-\frac{mg}{KV^2\cos.^2\theta}.e^{\frac{2K}{m}s},$$

ou en déterminant la constante de manière que l'on ait en même temps $s=o$, $q=\text{tang.}\theta$

$$(6)\ldots\ldots\text{tang}\,\theta\sqrt{1+\text{tang.}^2\theta}-q\sqrt{1+q^2}$$
$$+l\frac{\text{tang.}\theta+\sqrt{1+\text{tang.}^2\theta}}{q+\sqrt{1+q^2}}=\frac{mg}{KV^2\cos.^2\theta}\left(e^{\frac{2K}{m}s}-1\right).$$

179. L'équation (6) donnant une relation entre q et s fait connaître la figure de la courbe. Éliminant $e^{\frac{2K}{m}s}$ entre cette équation et l'équation (5), et représentant par Q la quantité

$$\frac{mg}{KV^2\cos.^2\theta}+\text{tang.}\theta\sqrt{1+\text{tang.}^2\theta}-q\sqrt{1+q^2}+l\frac{\text{tang.}\theta+\sqrt{1+\text{tang.}^2\theta}}{q+\sqrt{1+q^2}},$$

on déduit

$$dx=-\frac{m}{k}\frac{dq}{Q},$$
$$dz=-\frac{m}{k}\frac{qdq}{Q};$$

et par conséquent

$$x=\frac{m}{k}\int_q^{\text{tang.}\theta}\frac{dq}{Q},$$
$$z=\frac{m}{k}\int_q^{\text{tang.}\theta}\frac{qdq}{Q}.$$

Ces intégrales définies étant calculées par approximation feront connaître les coordonnées du point de la courbe dans lequel la tangente a une inclinaison fixée par la valeur de q. On pourra donc tracer cette courbe qui se trouvera déterminée par une suite de points et par la direction des tangentes tracées par ces mêmes points. Les valeurs de x et de z correspondantes à $q = o$ donneront les coordonnées du sommet de la courbe. La valeur de x qui répondra à la valeur o de z donnera l'amplitude du jet.

La courbe n'est point ici formée de deux parties symétriques séparées par le sommet ; la branche descendante a pour asymptote une ligne verticale. En effet, soient x' et z' deux valeurs de x et z correspondantes à une valeur négative très-grande de q que nous désignerons par q' ; et soient également x'' et z'' deux autres valeurs de x et z correspondantes à une valeur négative q'' encore plus grande. On aura sensiblement

$$x'' - x' = -\frac{m}{K}\int_{q'}^{q''}\frac{dq}{q^2} = \frac{m}{K}\left(\frac{1}{q'} - \frac{1}{q''}\right),$$

$$z'' - z' \doteq -\frac{m}{K}\int_{q'}^{q''}\frac{dq}{q} = -\frac{m}{K}.l\frac{q''}{q'}:$$

or, la première de ces expressions tend vers la limite o à mesure que q' et q'' sont plus grandes, tandis que la seconde expression tend à devenir $-\frac{1}{0}$, d'où résulte la proposition énoncée.

L'équation (6) donne la longueur de la courbe en fonction de l'inclinaison de la tangente.

180. Pour obtenir l'expression du temps nécessaire pour parcourir une portion donnée de la courbe, on observe que, d'après l'équation (4), $dt^2 = -\frac{1}{g}\, dq.dx$, ou en remplaçant dx par la valeur précédente,

$$dt = -\sqrt{\frac{m}{gK}}.\frac{dq}{\sqrt{Q}}.$$

d'où

$$t = \sqrt{\frac{m}{gK}}\int_q^{\text{tang.}\varphi} \frac{dq}{\sqrt{Q}}.$$

181. Enfin, pour avoir la vitesse du projectile en un point donné de la courbe, vitesse que nous désignerons par v, on observe que $v^2 = (1+q^2)\frac{dx^2}{dt^2}$, ou à cause de l'équation (4),

$$v^2 = g^2.(1+q^2)\frac{dt^2}{dq^2};$$

ou en mettant à la place de dt la valeur précédente,

$$v^2 = \frac{mg}{K}\,\frac{1+q^2}{Q}.$$

En donnant à q une valeur négative de plus en plus grande, cette formule s'approche de plus en plus de la valeur $v^2 = \frac{mg}{K}$, ce qui s'accorde avec les résultats obtenus n° 122.

182. Considérons maintenant le cas où la direction initiale du mouvement s'écarte très peu d'une ligne horizontale. On peut alors regarder dans la partie de la courbe située au-dessus de l'axe des x les quantités x et s comme ne différant pas sensiblement l'une de l'autre. L'équation (3) devient

$$\frac{dx}{dt}=\mathrm{V}.e^{-\frac{\mathrm{K}}{m}x};$$

et l'équation (5),

$$dq=-\frac{g}{\mathrm{V}^2}dx.e^{\frac{2\mathrm{K}}{m}x},$$

d'où l'on déduit, au lieu de l'équation (6),

$$q=\mathrm{tang}.\theta-\frac{mg}{2\mathrm{KV}^2}\left(e^{\frac{2\mathrm{K}}{m}x}-1\right).$$

Cette dernière, en remarquant que $dz=qdx$, donne pour l'équation de la courbe

$$z=x.\mathrm{tang}.\theta-\frac{m^2g}{4\mathrm{K}^2\mathrm{V}^2}\left(e^{\frac{2\mathrm{K}}{m}x}-\frac{2\mathrm{K}}{m}x-1\right).$$

183. L'équation précédente $\frac{dx}{dt}=\mathrm{V}.e^{-\frac{\mathrm{V}}{m}x}$ donne l'expression de la vitesse du projectile en un point quelconque de la courbe. Le temps nécessaire pour qu'il parcoure une partie donnée de cette courbe est exprimé par la formule

$$t=\frac{m}{\mathrm{KV}}\left(e^{\frac{\mathrm{K}}{m}x}-1\right).$$

XII. Mouvement des planètes et des satellites. — Lois de Kepler. — Principe de la gravitation universelle.

184. Les astronomes ont établi d'après l'observation les lois géométriques des mouvements des planètes autour du soleil et des satellites autour des planètes. Ces mouvements s'accomplissent à fort peu près dans des orbites elliptiques, et sont assujettis à des conditions générales, appelées lois de Kepler. Newton a déterminé d'après ces lois la cause mécanique de ces mouvements, c'est-à-dire la nature des forces dont les corps planétaires sont animés et des actions qu'ils exercent les uns sur les autres. Il a montré que ces actions sont le résultat d'une force d'attraction mutuelle existant entre toutes les parties des corps, et dont l'intensité est réciproque au quarré de la distance de ces parties. Nous indiquerons les notions principales sur lesquelles ces résultats importants sont fondés.

Première loi de Kepler. *Les orbites des planètes sont des courbes planes, et les aires décrites par les rayons vecteurs autour du centre du soleil sont proportionnelles aux temps :* d'où l'on conclut que la force qui produit le mouvement de la planète est dirigée vers le centre du soleil.

185. Cette conséquence résulte immédiatement de ce qui a été exposé dans le n° 144. Si l'on veut la démontrer directement, soit (*fig.* 21) A le centre du soleil, M celui de la planète, MN l'orbite, que nous supposerons rapportée à deux axes rectangulaires Ax, Ay passant par le centre du soleil. Désignons par P, Q les composantes dans le sens des x et des y de la force agissant

sur la planète, que nous supposons dirigées de manière à diminuer les coordonnées positives. m étant la masse de la planète, les équations de son mouvement seront

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-P, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-Q.$$

On en déduit

$$m\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}=Py-Qx,$$

ou

$$m\frac{d.(xdy-ydx)}{dt^2}=Py-Qx.$$

Or, $xdy-ydx$ est le double de l'aire décrite par le rayon vecteur AM lorsque t augmente de l'élément dt. Donc, d'après la loi énoncée, cette quantité est constante dans toute l'étendue de l'orbite. Sa différentielle est donc nulle, et l'on a

$$o=Py-Qx, \qquad \text{ou} \qquad \frac{P}{Q}=\frac{x}{y}.$$

La force dont P et Q sont les composantes est donc dirigée suivant MA.

Deuxième loi. *Les planètes décrivent des ellipses dont le centre du soleil est un des foyers ;* d'où l'on conclut que la force qui produit le mouvement de la planète varie en raison inverse du quarré de la distance de la planète au soleil.

186. Des équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-P, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=-Q,$$

nous déduisons

$$m\frac{dxd^2x+dyd^2y}{dt^2}=-(Pdx+Qdy);$$

et en intégrant

$$m\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}=-2\int(Pdx+Qdy),$$

l'intégrale du second membre étant prise depuis les valeurs correspondantes à un instant donné.

Changeant les coordonnées rectangulaires x, y en coordonnées polaires, appelant r le rayon vecteur AM, et ω l'angle de ce rayon avec l'axe des x, ce qui donnera

$$x=r\cos.\omega, \qquad y=r\sin.\omega;$$

et nommant F la résultante des deux forces P, Q, que l'on sait être dirigée suivant MA, en sorte que

$$P=F\cos.\omega, \qquad Q=F\sin.\omega;$$

l'équation précédente devient

$$m\frac{dr^2+r^2d\omega^2}{dt^2}=-2\int Fdr.$$

Et comme l'on sait par la première loi que l'aire décrite par le rayon vecteur AM dans le temps dt est constante, on peut écrire, C étant une constante,

$$r^2.d\omega=Cdt;$$

ce qui change cette équation en

$$mC^2\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\omega}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=-2\int Fdr.$$

On en déduit

$$d\omega=\frac{C.dr}{r\sqrt{-C^2-2r^2\int\frac{F}{m}dr}},$$

ce qui déterminerait la figure de l'orbite si la force centrale F était donnée en fonction de la distance r.

En différentiant l'équation précédente, elle donne

$$F = mC^2\left[\frac{1}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{d.\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\omega}\right)^2}{dr}\right],$$

ce qui déterminera la force F lorsque la figure de l'orbite sera connue.

187. D'après la loi énoncée, la figure de l'orbite est ici une ellipse dont un des foyers est en A. L'équation de cette courbe est donc

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e.\cos.(\omega-\varpi)},$$

en représentant par

a le demi-grand axe de l'ellipse;

e l'excentricité;

ϖ l'angle formé par le grand axe avec l'axe des x.

On déduit de cette équation,

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\omega}\right)^2 = \frac{e^2\sin.^2(\omega-\varpi)}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{2}{ar(1-e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1-e^2)}.$$

D'après cela, l'expression de F du n° précédent devient

$$F = \frac{mC^2}{ar^2(1-e^2)}, \quad \text{d'où} \quad \frac{F}{m} = \frac{C^2}{ar^2(1-e^2)}.$$

La vitesse $\frac{F}{m}$, que la force dirigée suivant MA qui produit le mouvement de la planète pourrait imprimer à

cette planète dans l'unité de temps, est donc, dans toute l'étendue de l'orbite, proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$.

Troisième loi. *Les quarrés des temps des révolutions des planètes sont entre eux comme les cubes des grands axes de leurs orbites :* d'où l'on conclut que les mouvements des diverses planètes sont produits par une même force dont l'intensité varie en raison inverse des quarrés des distances de ces corps au soleil.

188. Les aires décrites par les rayons vecteurs étant proportionnelles au temps, l'équation $r^2.d\omega = C.dt$, dans laquelle $r^2.d\omega$ représente le double de l'aire décrite dans le temps dt, donne

$$2\pi.a^2\sqrt{1-e^2}=CT,$$

en désignant par T le temps de la révolution de la planète. Mettant dans l'expression de $\frac{F}{m}$ du n° précédent la valeur de C qui résulte de cette équation, il viendra

$$\frac{F}{m}=\frac{4\pi^2.a^3}{r^2T^2}.$$

Le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ étant constant pour les diverses planètes d'après la loi énoncée, la valeur de $\frac{F}{m}$ pour l'unité de distance est donc aussi constante. Donc la force émanant du soleil, qui régit les mouvements des planètes, agit également dans toute l'étendue du système planétaire sur des masses égales placées à égales distances du soleil. Cette force ne varie que par le changement de la distance.

Principe de la gravitation universelle.

189. Les mouvements des satellites autour des planètes étant à fort peu près assujettis aux mêmes conditions que les mouvements des planètes autour du soleil, les résultats précédents conduisent à considérer les mouvements des astres comme étant régis par une force d'attraction mutuelle existant entre toutes les substances matérielles, proportionnelle à la masse des parties qui s'attirent, et réciproque au quarré de la distance actuelle de ces parties. Cette hypothèse, développée par le calcul, donne les lois du système du monde.

La force d'attraction qui s'exerce entre deux corps planétaires doit être regardée comme émanant de toutes les parties de ces corps. Mais leur figure est à fort peu près sphérique, et il sera démontré par la suite que la force d'attraction dont il s'agit peut être supposée émaner du centre des planètes, comme si toute leur masse était concentrée dans ce point. D'après cela, considérons deux corps planétaires dont les masses sont respectivement M et m, la distance de leurs centres étant désignée par r. La force avec laquelle chaçun de ces corps est attiré vers l'autre, exprimée en unité de poids, doit, conformément au principe que l'on vient d'énoncer, être représentée par $\frac{f.\mathrm{M}m}{r^2}$, en désignant par f un coefficient constant. Ainsi, ces corps étant supposés céder librement à cette attraction, le premier s'approchera du second en acquérant la vitesse $\frac{f.m}{r^2}$ dans l'unité de temps, et le second se rapprochera du premier en acquérant la vitesse $\frac{f.\mathrm{M}}{r^2}$ dans l'unité de temps. Donc, si l'on considère

le mouvement relatif du second corps par rapport au premier, c'est-à-dire le mouvement par lequel le second corps s'approche du premier regardé comme fixe dans l'espace, il faut regarder ce second corps comme acquérant dans l'unité de temps la somme des deux vitesses précédentes, c'est-à-dire la vitesse $\frac{f.(M+m)}{r^2}$.

190. D'après ce qui précède, M désignant la masse du soleil, m la masse de la planète et r la distance actuelle des centres de ces deux corps, la force à laquelle sera dû le mouvement de la planète par rapport au soleil doit être capable d'imprimer à la masse m de la planète la vitesse $\frac{f.(M+m)}{r^2}$ dans l'unité de temps. On devra donc remplacer $\frac{F}{m}$ par $\frac{f.(M+m)}{r^2}$ dans l'équation du n° 188, qui deviendra ainsi

$$f.(M+m)=\frac{4\pi^2.a^3}{T^2}.$$

Il paraît donc que dans l'hypothèse de la gravitation universelle le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ n'est pas rigoureusement le même pour toutes les planètes. Si les observations indiquent une valeur constante pour ce rapport, c'est parce que les masses des planètes sont toutes très-petites par rapport à la masse du soleil.

191. La connaissance de la grandeur du rayon de la terre, et de l'intensité de la pesanteur à sa surface, donne les moyens de déterminer les rapports des masses de toutes les parties du système solaire, et l'intensité de la

pesanteur dans les divers points de ce système. Soit m la masse de la terre, μ la masse d'un corps placé à une petite distance au-dessus de sa surface, et ρ le rayon de cette surface. Ce corps, d'après le n° précédent, tendra à s'approcher du centre de la terre en acquérant dans l'unité de temps la vitesse $\frac{f.(m+\mu)}{\rho^2}$ ou simplement $\frac{f.m}{\rho^2}$ si μ est très-petite par rapport à m. Donc

$$\frac{f.m}{\rho^2}=g,$$

g désignant la vitesse acquise dans l'unité du temps par les corps graves tombant à la surface de la terre (en faisant abstraction de l'effet du mouvement de rotation propre de la terre et supposant la terre parfaitement sphérique). En comparant cette équation à la précédente, on a

$$\frac{m}{M+m}=\frac{g\rho^2T^2}{4\pi^2a^3}, \qquad \frac{m}{M}=\frac{g\rho^2T^2}{4\pi^2a^3-g\rho^2T^2},$$

expression du rapport de la masse du soleil à celle de la terre.

192. Soit maintenant une autre planète dont m' est la masse, a le grand axe de l'orbite, T' le temps de la révolution ; l'équation du n° 190 donnera

$$f\,(M+m')=\frac{4\pi^2.a'^3}{T'^2},$$

ou en mettant pour f la valeur $\frac{g\rho^2}{m}$,

$$m'=m\frac{4\pi^2.a'^3}{g\rho^2T'^2}-M.$$

Le rapport entre la masse m d'une planète qui a un satellite et la masse M du soleil peut être déterminé d'une autre manière. Soit μ la masse du satellite, α le demi-grand axe de l'orbite qu'il décrit autour de la planète, τ le temps de sa révolution. L'équation du n° 190 appliquée au système de ces deux corps donnera

$$f(m+\mu)=\frac{4\pi^2\alpha^3}{\tau^2};$$

et, comme l'on peut négliger m par rapport à M, et μ par rapport à m, on déduit de ces deux équations

$$\frac{m}{M}=\frac{\alpha^3.T^2}{a^3\tau^2}.$$

193. Pour déterminer la vitesse g' qui serait imprimée dans l'unité de temps aux corps tombant à la surface d'une planète dont la masse serait m' et le rayon de la surface ρ', on remarque que l'équation $\frac{f.m'}{\rho'^2}=g'$ relative à cette planète, étant comparée à l'équation semblable relative à la terre posée n° 191, donne

$$g'=g.\frac{m'\rho^2}{m\rho'^2}.$$

XIII. Mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe en raison inverse du quarré des distances.

194. Soit A (*fig.* 22) un centre fixe, et m la masse d'un corps qui est attiré vers ce centre avec une force dont la va-

leur en unité de poids est $\frac{A}{r^2}$ lorsque ce corps est placé à la distance r du centre A. On suppose qu'à l'instant où l'on commence à compter le temps, le corps dont il s'agit se trouve en M à la distance R du centre fixe, et qu'il se meut avec une vitesse V dans une direction formant l'angle θ avec le rayon R. La position initiale du rayon vecteur AM est donnée par l'angle Ω compris entre ce rayon et une ligne fixe Ax, tracée dans le plan qui contient le rayon AM et la direction de la vitesse V. La courbe que décrira le corps autour du centre A est évidemment comprise dans le plan dont on vient de parler. Il s'agit de déterminer la figure de cette courbe et le mouvement du corps.

On remarque en premier lieu que la force qui produit le mouvement du corps émanant d'un centre fixe, les aires décrites par le rayon vecteur seront proportionnelles aux temps, conformément au n° 185. Or, dans le premier élément du temps, le double de l'aire décrite par le rayon AM est $R.V\sin.\theta.dt$. Donc l'équation $r^2.d\omega = C.dt$, posée n° 186, devient pour cet élément du temps

$$R.V\sin.\theta.dt = C.dt, \qquad \text{d'où} \qquad C = R.V\sin.\theta.$$

195. En second lieu, soit v la vitesse du corps lorsqu'il est parvenu en m au bout du temps t. L'équation

$$m\frac{dr^2+r^2d\omega^2}{dt^2} = -2\int F dr,$$

trouvée n° 186, en observant que nous avons ici $F = \frac{A}{r^2}$, devient

$$mv^2 = -2\int\frac{dr.A}{r^2} = const. + \frac{2A}{r},$$

et donnera, pour l'instant où le corps est dans la position initiale M,

$$mV^2 = const. + \frac{2A}{R}, \quad \text{d'où} \quad const. = mV^2 - \frac{2A}{R},$$

et

$$mv^2 = mV^2 - \frac{2A}{R} + \frac{2A}{r}.$$

Nous devons donc dans les formules des n°s 186 et 187 remplacer $-2\int F dr$ par $mV^2 - \frac{2A}{R} + \frac{2A}{r}$.

196. D'après cela, l'équation

$$d\omega = \frac{C.dr}{r\sqrt{-C^2 - 2r^2\int\frac{F}{m}dr}},$$

obtenue n° 186, deviendra

$$d\omega = \frac{C.dr}{r^2\sqrt{-\frac{C^2}{r^2} + V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{2A}{mr}}},$$

dans laquelle il faudra mettre pour la constante C la valeur trouvée n° 194 d'après les données de l'état initial du corps. L'équation précédente peut s'écrire

$$d\omega = \frac{-d.\frac{C}{r}}{\sqrt{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{C}{r} - \frac{A}{mC}\right)^2}{V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{A^2}{m^2C^2}}}},$$

et donne en intégrant

$$\omega = const. + \text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{r}-\frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2-\frac{2A}{mR}+\frac{A^2}{m^2C^2}}}.$$

On aura donc pour la position initiale M :

$$\Omega = const. + \text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{R}-\frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2-\frac{2A}{mR}+\frac{A^2}{m^2C^2}}},$$

et par conséquent pour la valeur complète de ω,

$$\omega = \Omega - \text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{R}-\frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2-\frac{2A}{mR}+\frac{A^2}{m^2C^2}}} + \text{arc cos.}\frac{\frac{C}{r}-\frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2-\frac{2A}{mR}+\frac{A^2}{m^2C^2}}}.$$

On en déduit

$$r = \frac{C}{\frac{A}{mC}+\sqrt{V^2-\frac{2A}{mR}+\frac{A^2}{m^2C^2}}.\cos.\left(\omega-\Omega+\text{arc.cos.}\frac{\frac{C}{R}-\frac{A}{mC}}{\sqrt{V^2-\frac{2A}{mR}+\frac{A^2}{m^2C^2}}}\right)},$$

ou, en remplaçant C par la valeur écrite n° 194, et en faisant pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} p &= \frac{mR^2V^2\sin.^2\theta}{A}, \\ e &= \sqrt{\frac{m^2R^2V^2\sin.^2\theta}{A^2}\left(V^2-\frac{2A}{mR}\right)+1}, \\ \varpi &= \Omega - \text{arc.cos.}\left\{\frac{\frac{mR^2V^2\sin.^2\theta}{A}-1}{\sqrt{\frac{m^2R^2V^2\sin.^2\theta}{A^2}\left(V^2-\frac{2A}{mR}\right)+1}}\right\}; \end{aligned}\right.$$

$$r = \frac{p}{1+e\cos.(\omega=\varpi)}.$$

197. Cette équation représente une courbe du second degré dont le point A est un des foyers, et dans laquelle p est le demi-paramètre, e l'excentricité, et ω l'inclinaison du grand axe sur l'axe fixe Ax.

L'orbite décrite par le corps sera une ellipse si l'on a $mV^2 < \frac{2A}{R}$; elle sera une portion de parabole si $mV^2 = \frac{2A}{R}$; enfin elle appartiendra à une branche d'hyperbole si l'on a $mV^2 > \frac{2A}{R}$. Ainsi, la nature de cette orbite ne dépend pas de la direction du mouvement initial, mais seulement de la distance R et de la vitesse V. On peut remarquer que la valeur $V = \sqrt{\frac{2A}{mR}}$, qui résulte de l'équation $mV^2 = \frac{2A}{R}$, représente la vitesse qu'aurait acquise un corps partant d'une distance infinie avec une vitesse nulle lorsqu'il serait parvenu à la distance R du centre A.

En nommant, comme dans le n° 187, a le demi-grand axe de l'orbite, ou la distance moyenne, c'est-à-dire la moyenne des valeurs extrêmes $\frac{p}{1+e}$, $\frac{p}{1-e}$ du rayon vecteur r, on aura

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{RA}{2A - R.mV^2}.$$

La valeur du grand axe de l'orbite ne dépend donc pas de la direction initiale du mouvement du point matériel.

198. L'équation $mv^2 = mV^2 - \frac{2A}{R} + \frac{2A}{r}$, obtenue n° 195, donne (en ayant égard aux expressions de p et e du n° précédent)

$$v^2 = \frac{A}{m}\left(\frac{2}{r} - \frac{1-e^2}{p}\right),$$

ou si l'on veut

$$v = \sqrt{\frac{A}{m}\,\frac{2a-r}{ar}}.$$

La plus grande et la moindre valeur de la vitesse ont lieu lorsque le corps passe au sommet de la courbe le plus voisin et le plus éloigné du foyer dont émane la force. Dans l'astronomie, ces points se nomment le *périhélie* et l'*aphélie* de la planète.

199. Pour obtenir maintenant une relation entre le temps et la position du corps dans son orbite, nous reprenons l'équation du n° 196,

$$d\omega = \frac{C.dr}{r^2\sqrt{-\frac{C^2}{r^2} + V^2 - \frac{2A}{mR} + \frac{2A}{mr}}}.$$

D'après la relation $r^2 d\omega = C.dt$ posée n° 186, cette équation donne

$$dt = \frac{r.dr}{\sqrt{-C^2 + \left(V^2 - \frac{2A}{mR}\right)r^2 + \frac{2Ar}{m}}},$$

ou en mettant pour C^2 sa valeur (n° 194) $R^2V^2\sin.^2\theta$, et

ayant égard aux expressions de p et c écrites n° 196,

$$dt=\frac{r.dr}{\sqrt{-\frac{A}{m}p-\frac{A}{mp}(1-e^2)^2r^2+\frac{2Ar}{m}}}.$$

Cette dernière équation peut s'écrire

$$dt=\frac{r.dr}{\sqrt{\frac{Ap}{m(1-e^2)}}.\sqrt{e^2-\left[\frac{r(1-e^2)}{p}-1\right]^2}};$$

ou en mettant a à la place de $\frac{p}{1-e^2}$,

$$dt=\frac{r.dr}{\sqrt{\frac{Aa}{m}}.\sqrt{e^2-\left(\frac{r}{a}-1\right)^2}};$$

dont l'intégrale (qui s'obtient facilement en posant $\frac{r}{a}-1=e\cos.\varphi$, φ désignant une nouvelle variable) est

$$t=const.-\sqrt{\frac{ma^3}{A}}\left[\sqrt{e^2-\left(\frac{r}{a}-1\right)^2}+\text{arc. cos.}\frac{1}{e}\left(\frac{r}{a}-1\right)\right].$$

Si l'on pose successivement $r=a(1-e)$ et $r=a(1+e)$, cette formule deviendra

$$t=const.-\pi\sqrt{\frac{ma^3}{A}}, \quad \text{et} \quad t=const.$$

Ainsi, la durée entière d'une révolution entière est $2\pi\sqrt{\frac{ma^3}{A}}$. Ce résultat s'accorde avec l'équation écrite n° 188, puisque nous avons ici $F=\frac{A}{r^2}$.

XIV. Attraction d'un corps sphérique sur un point matériel. — Variations de la gravité a la surface de la terre. — Densité moyenne de la terre.

200. Nous avons admis dans les articles précédents que l'attraction exercée par les corps planétaires sur un point matériel pouvait être regardée comme émanant du centre de ces corps, de la même manière que si toute leur masse était concentrée dans ce point. Cette hypothèse est conforme à la vérité lorsque l'on considère les corps planétaires comme des sphères homogènes, ou comme des sphères formées de couches concentriques homogènes.

Soit C (*fig.* 23) le centre d'une couche sphérique d'une épaisseur infiniment petite dont nous désignerons le rayon CM par R; et A la position d'un point matériel dont la masse est m, et que nous supposons d'abord placé au dehors de la courbe sphérique. Appelons r la distance AC. Il s'agit de connaître la force avec laquelle le point matériel est attiré par la couche sphérique, force qui est évidemment dirigée suivant la ligne AC lorsque la couche est homogène. Nous pouvons décomposer cette couche en éléments différentiels en la coupant par des plans MN perpendiculaires à la ligne AC. Désignons pour l'un quelconque de ces éléments par ω l'angle MCA, et par x la distance AM. Nous aurons

$$MP = R\sin.\omega, \qquad \text{et} \qquad x^2 = r^2 - 2Rr\cos.\omega + R^2.$$

Le volume de l'élément différentiel dont il s'agit sera

$$dR.2\pi R\sin.\omega.Rd\omega;$$

et, par conséquent, en appelant μ la masse de la matière de la couche pour l'unité de volume, la masse de cet élément sera

$$\mu 2.\pi.R^2 dR d\omega \sin.\omega.$$

Remarquons d'ailleurs que les portions de l'élément différentiel placées en M et en N exercent sur le point matériel placé en A des actions qui se détruisent en partie, et dont on ne doit prendre que les composantes dans la direction AC. On aura d'après cela, pour la force avec laquelle le point matériel est attiré par l'élément différentiel,

$$\frac{f.\mu m.2\pi R^2 dR.d\omega \sin.\omega}{x^2}.\frac{r-R\cos.\omega}{x},$$

f désignant un coefficient constant, comme dans le n° 189; ou en mettant pour ω la valeur qui se déduit de l'équation écrite ci-dessus entre ω et x,

$$f.\mu m\frac{\pi R dR}{r^2}.dx\frac{x^2+r^2-R^2}{x^2}.$$

201. On aura l'attraction exercée sur le point matériel par la couche sphérique entière en prenant l'intégrale de cette expression entre les valeurs extrêmes AB et AD de x, c'est-à-dire depuis $x=r-R$ jusqu'à $x=r+R$. L'intégrale indéfinie étant

$$f.\mu m\frac{\pi R dR}{r^2}\left(x-\frac{r^2-R^2}{x}\right),$$

l'expression cherchée est donc

$$f.\mu m.\frac{4\pi R^2 dR}{r^2}.$$

Le facteur $4\pi R^2$ représente la surface de la couche sphé-

rique, et $\mu.4\pi R^2 dR$ en représente la masse. Ainsi, l'attraction qu'exerce cette couche sur un point matériel placé au dehors ne diffère pas de celle qu'exercerait un point matériel de même masse que celle de la couche et qui serait placé au centre de cette couche.

202. Une sphère étant l'assemblage d'une infinité de couches concentriques, on peut lui appliquer le même résultat ; et on voit que ce résultat subsiste également lorsque la quantité μ est constante, ou lorsqu'elle varie seulement avec le rayon R, c'est-à-dire lorsque la sphère est homogène, ou composée de couches concentriques homogènes.

203. Si nous regardons μ comme constante, l'attraction exercée sur le point matériel par une couche d'une épaisseur finie ayant pour rayons extrêmes R′ et R, sera

$$f.\mu m.\frac{4\pi}{3}\frac{R^3-R'^3}{r^2}.$$

L'attraction d'une sphère dont le rayon est R est donc

$$f.\mu m.\frac{4\pi}{3}\frac{R^3}{r^2};$$

et si le point matériel était placé à la surface de cette sphère, l'attraction dont il s'agit deviendrait

$$f.\mu m.\frac{4\pi}{3}R,$$

c'est-à-dire qu'elle serait proportionnelle au rayon de la sphère.

204. Considérons maintenant le cas où le point matériel attiré par une couche sphérique d'une épaisseur

infiniment petite est placé en A (*fig.* 24) en dedans de cette couche. L'expression obtenue n° 200, pour l'attraction d'un élément différentiel de la couche, convient également au cas dont il s'agit pour ceux de ces éléments différentiels qui sont placés à gauche du plan EF mené par le point A perpendiculairement à la ligne AC. Ainsi, l'attraction de cette partie de la couche est exprimée par l'intégrale indéfinie

$$f.\mu m.\frac{\pi R dR}{r^2}\left(x-\frac{r^2-R^2}{x}\right),$$

qui doit être prise entre les valeurs extrêmes AE et AD de x, c'est-à-dire depuis $x=\sqrt{Rr-r^2}$ jusqu'à $x=R+r$. Cette attraction est donc

$$f.\mu m.\frac{\pi R dR}{r^2}\left(2R-\frac{Rr-2r^2+R^2}{\sqrt{Rr-r^2}}\right).$$

A l'égard des éléments de la partie de la couche sphérique qui sont placés à droite du plan EF, le même calcul fait dans le n° 200 donnera pour l'expression de leur attraction

$$\frac{f.\mu m.2\pi R^2 dR.d\omega \sin.\omega}{x^2}.\frac{R\cos.\omega-r}{x},$$

qui se change en

$$f.\mu m\,\frac{\pi R dR}{r^2}dx\frac{R^2-r^2-x^2}{x^2},$$

expression dont l'intégrale indéfinie est

$$-f.\mu m\frac{\pi R dR}{r^2}\left(x+\frac{R^2-r^2}{x}\right).$$

Cette intégrale doit être prise entre les valeurs extrêmes AB et AE de x, c'est-à-dire depuis $x = R - r$ jusqu'à $x = \sqrt{Rr - r^2}$. L'attraction cherchée de cette seconde partie de la couche est donc

$$f.\mu m.\frac{\pi R dR}{r^2}\left(R - \frac{Rr - 2r^2 + R^2}{\sqrt{Rr - r^2}}\right),$$

c'est-à-dire égale à celle de la première partie. Et, comme ces deux attractions s'exercent en sens opposés, on voit qu'elles se détruisent réciproquement; en sorte qu'un point matériel placé dans l'intérieur d'une couche sphérique homogène d'une épaisseur infiniment petite ne tend à se déplacer dans aucune direction.

205. Ce résultat s'applique évidemment à un point matériel placé dans l'intérieur d'une couche sphérique d'une épaisseur finie, pourvu que la densité ne varie dans cette dernière couche que dans le sens du rayon.

206. On voit enfin qu'un point matériel placé dans l'intérieur d'une sphère pleine n'est attiré vers le centre qu'en vertu de l'action d'une sphère concentrique à la première et passant par le point, puisque toutes les couches qui enveloppent cette dernière sphère n'exercent sur le corps que des actions qui se détruisent réciproquement. La force qui attire ce point matériel vers le centre est donc exprimée par la dernière des formules écrites n° 203, en sorte qu'elle est proportionnelle à la distance au centre, conformément au résultat dont on a fait usage dans le n° 131.

207. Si la terre était une sphère parfaite composée de couches concentriques homogènes, et si elle était immobile, l'intensité de la force de la gravité serait constante

pour tous les points de la surface, et partout dirigée vers le centre. Cette intensité décroîtrait en raison inverse du quarré de la distance au centre pour des corps qui s'éloigneraient de plus en plus de la surface de la terre. La régularité de ces lois est altérée par deux causes principales : 1° parce que la terre n'est pas exactement formée de couches concentriques homogènes, et surtout parce qu'elle n'est pas exactement sphérique; 2° parce que la force centrifuge résultant du mouvement diurne de rotation se compose avec l'attraction de la masse de la terre, et diminue un peu l'action de cette force.

Par l'effet du défaut de sphéricité de la terre, 1° l'action de la pesanteur n'est pas dirigée exactement vers le centre : elle est dirigée suivant la ligne appelée verticale; 2° l'intensité de cette action augmente de l'équateur aux pôles, par l'effet de la diminution du rayon, d'une petite quantité proportionnelle au sinus de la latitude du lieu.

208. Quant à l'effet de la force centrifuge, on peut l'apprécier en considérant que la terre effectue une révolution entière sur son axe en 86164 secondes. Soit donc R le rayon moyen de la terre supposée sphérique, dont la valeur est $R = \frac{10\,000\,000^m}{\frac{1}{2}\pi} = 6366198^m$, et L la latitude du lieu. La vitesse de rotation sera en ce lieu $\frac{2\pi R.\cos.L}{86164}$, et par conséquent la vitesse imprimée dans l'unité de temps par la force centrifuge dans le sens d'un rayon mené dans le plan du parallèle sera, conformément au n° 148,

$$\left(\frac{2\pi}{86164}\right)^2.R.\cos.L = 0^m,033853.\cos.L.$$

La composante de cette vitesse dans le sens de l'action de la gravité, c'est-à-dire la quantité dont la force centrifuge due à la rotation de la terre diminue la vitesse imprimée dans l'unité de temps par la gravité, est donc

$$0^m,033853.\cos.^2 L.$$

Cette diminution est d'autant moindre que l'on s'éloigne davantage de l'équateur. Ainsi, l'effet de la force centrifuge se réunit au défaut de sphéricité pour faire augmenter de l'équateur aux pôles la force avec laquelle les corps sont véritablement attirés vers le centre de la terre, et qui cause leur chute.

Nous avons représenté par g la vitesse qu'imprimait cette force aux parties matérielles dans l'unité de temps. L'unité de temps étant la seconde sexagésimale, la valeur de g est à l'Observatoire de Paris $g = 9^m, 80896$. A la latitude de 45° et au niveau de la mer, on a $g = 9^m, 80557$. Au même niveau, et pour une latitude quelconque L, on doit prendre

$$g = g^m,80557(1 - 0,002588\cos.2L).$$

Et lorsqu'on s'élève au-dessus de la surface des mers d'une hauteur h, cette expression doit être multipliée par le rapport

$$\left(\frac{6366198}{6366198+h}\right)^2.$$

Densité moyenne de la terre.

209. On a employé pour l'évaluation de cette densité deux méthodes : 1° la déviation du fil à plomb causée par l'attraction des montagnes voisines ; 2° l'observation

des oscillations produites par l'attraction d'un corps. On indiquera succinctement le principe de ces méthodes.

Soit A le volume de la terre et π le poids moyen de l'unité de volume de la matière dont elle est formée. La masse de la terre sera exprimée par $A\frac{\pi}{g}$ en désignant toujours par g la vitesse imprimée par la gravité aux corps pesants à la surface de la terre. En représentant par a le volume d'une montagne voisine, par ϖ le poids moyen de l'unité de volume des matières qui la composent, on aura également $\frac{\varpi}{g}$ pour la masse de cette montagne. Si maintenant on représente par c la distance du lieu où l'on se trouve au centre de gravité de la montagne, nous devrons concevoir que les corps sont sollicités dans ce lieu, 1° par une force verticale exprimée par $f.A\frac{\pi}{g}.\frac{1}{R^2}$, en désignant par f le même coefficient qu'au n° 189, et par R le rayon moyen de la terre ; 2° par une force $f.a\frac{\varpi}{g}.\frac{1}{c^2}$ due à l'action de la montagne, que nous pouvons généralement supposer horizontale sans erreur sensible. Or, le fil à plomb devant se diriger suivant la résultante de ces deux forces, nous aurons donc, en désignant par α l'angle de ce fil avec la verticale, angle qui peut être observé,

$$\frac{a\varpi}{A\pi}\frac{R^2}{c^2} = \text{tang.}\,\alpha,$$

équation d'où l'on déduira la valeur du rapport $\frac{\pi}{\varpi}$ de la densité moyenne de la terre à celle des matières dont la montagne est formée.

On a conclu d'une observation de ce genre faite par

Maskeline en Écosse que la densité moyenne de la terre était quatre à cinq fois plus grande que celle de l'eau.

210. La seconde méthode repose sur un principe différent. Concevons une verge AA (*fig.* 25) considérée comme levier rigide et sans masse aux extrémités duquel on a placé deux petits corps égaux entre eux. Ce levier est suspendu par son milieu C au moyen d'un fil très-fin. Admettons maintenant que l'on présente aux deux corpsA deux masses égales D. L'attraction de ces masses tend à faire sortir le levier AA de sa position naturelle et à le transporter dans une position voisine BB, en faisant tordre le fil auquel ce levier est suspendu. Le fil résistant à cette torsion, les corps placés aux extrémités du levier prennent par l'effet des actions opposées de l'attraction des masses D, et de la résistance du fil, un mouvement dont l'observation peut conduire à la solution de la question dont il s'agit.

Nous savons en effet, par les expériences de Coulomb, que la résistancequ'oppose un fil à la torsion est proportionnelle à l'angle de torsion. Cela posé, considérons seulement le mouvement de l'un des corps A : soit μ sa masse, m la masse placée en D, r le rayon CA, c la distance AD, et ω l'angle de torsion au bout du temps t, angle que nous supposerons très-petit. D'après cette dernière supposition, l'attraction exercée par la masse D pourra être censée dirigée dans le sens du mouvement de la petite masse A, et l'on aura pour l'équation du mouvement de cette masse

$$\mu \frac{rd^2\omega}{dt^2} = \frac{f.m\mu}{(c-r\omega)^2} - T\omega,$$

f désignant toujours le même coefficient qu'au n° 189,

et T la valeur de la résistance du fil à la torsion lorsque ce fil est tordu d'un arc égal à 1. Cette équation, en négligeant les puissances supérieures de ω, peut s'écrire

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}=\frac{f.m}{c^2r}-\left(\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}\right)\omega.$$

211. Pour l'intégrer, c'est-à-dire pour trouver une expression de ω en fonction de t par laquelle l'équation soit satisfaite et qui s'accorde également avec les données de l'état initial, on posera

$$\omega=A+B\sin.pt+C\cos.qt,$$

A, B, C, p et q étant des constantes; et l'on s'assurera facilement que cette expression satisfait à l'équation différentielle, pourvu que l'on ait

$$A=\frac{\frac{f.m}{c^2r}}{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}},\qquad \text{et}\qquad p=q=\sqrt{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}.$$

L'expression générale de ω est donc

$$\omega=\frac{\frac{f.m}{c^2r}}{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}+B\sin.t\sqrt{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}+C\cos.t\sqrt{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}.$$

Les constantes B, C se détermineront d'après l'état initial du corps A. Supposons que quand $t=o$, la vitesse de ce corps soit nulle : l'expression précédente ne pourra satisfaire à cette condition à moins que l'on n'ait $B=o$. Supposons de plus que la valeur initiale de ω soit également nulle ; il faudra alors que l'on ait

$$C=-A.$$

Ainsi, la valeur complète de ω sera définitivement

$$\omega=\frac{\frac{f.m}{c^2r}}{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}\left(1-\cos.t\sqrt{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}\right).$$

212. Cette équation fait connaître la nature du mouvement périodique que prendra le corps A. Le levier oscille autour d'une position qui forme avec la position primitive AA l'angle

$$\frac{\frac{f.m}{c^2r}}{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}},$$

et cette même expression est aussi celle de l'écart du levier à partir de cette position intermédiaire. On peut observer l'amplitude de ces oscillations : en la désignant par l'arc Ω, on aura donc

$$\Omega=2.\frac{\frac{f.m}{c^2r}}{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}.$$

La durée des oscillations dont il s'agit est d'ailleurs

$$\frac{\pi}{\sqrt{\frac{T}{\mu r}-\frac{2f.m}{c^3}}}.$$

Cette durée peut également être observée : en la désignant par Θ, et ayant égard à l'équation précédente, on aura

$$\Theta=\pi\sqrt{\frac{\Omega}{2}\frac{c^3r}{f.m}}.$$

Mais si la masse de la terre est désignée comme ci-dessus par $A\frac{\Pi}{g}$, et son rayon par R, l'équation écrite n° 191 nous donnera

$$\frac{f.A\frac{\Pi}{g}}{R^2}=g, \quad \text{d'où} \quad f=\frac{g^2R^2}{A\Pi}.$$

De plus, si a représente le volume du corps placé en D, et ϖ le poids de l'unité de volume de ce corps, nous aurons $m=a\frac{\varpi}{g}$.

Mettant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\theta=\pi\sqrt{\frac{\Omega}{2}\frac{r}{g}\frac{c^2}{R^2}\frac{A\Pi}{a\varpi}},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\Pi}{\varpi}=\theta^2\frac{2}{\pi^2\Omega}\frac{gR^2a}{c^2rA}.$$

Les expériences dont il s'agit sont très-délicates et exigent des précautions minutieuses. Celles qui ont été faites par Cavendish ont conduit à attribuer à la terre une densité moyenne égale à environ $5\frac{1}{2}$ fois celle de l'eau, résultat un peu plus grand que celui qui a été mentionné n° 209.

FIN DE LA PREMIÈRE ANNÉE.

RÉSUMÉ

DES

LEÇONS DE MÉCANIQUE

DONNÉES

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

2e ANNÉE.

XV. Équilibre du polygone funiculaire. — Courbe funiculaire. — Chaînette.

213. Soit un fil parfaitement flexible et inextensible attaché par une de ses extrémités à un point fixe, et supposons qu'à divers points de ce fil soient appliquées des forces. Il s'agit de reconnaître et d'exprimer les conditions de l'équilibre de ce système. On voit en premier lieu qu'en supposant l'équilibre établi, les parties du fil seront tendues et dirigées en ligne droite d'un point d'application des forces à l'autre, en sorte que ce fil formera un polynôme rectiligne dont les points d'application seront des sommets. De plus les forces appliquées aux points extrêmes devront être dirigées dans le sens des côtés extrêmes du polygone, que nous supposons ici n'être pas fermé, pour plus de généralité.

m_0 étant (*fig.* 26) le point fixe auquel la première extrémité du fil est attachée, et le polygone $m_0 m_1 m_2 m_3 \ldots m_n m_{n+1}$ représentant la figure affectée par le fil, nous désignerons généralement par

x_i, y_i, z_i les coordonnées du point m_i comptées sur trois axes rectangulaires ;

a_i, b_i, c_i les angles formés avec les axes des x, des y et des z par le côté $m_i m_{i+1}$;

f_i la longueur de ce côté ;

P_i la force appliquée au point m_i ;

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ les angles formés avec les axes des x, des y et des z par la direction de cette force ;

T_i la tension qui s'établit dans le côté $m_i m_{i+1}$ du polygone.

Cela posé, nous remarquerons que le système étant en équilibre, chacune des forces P_i est nécessairement détruite par les tensions qui se sont établies dans les deux côtés du polygone adjacents au point d'application de cette force. Ainsi la direction de la force est comprise dans un même plan avec les deux côtés ; et il existe entre sa valeur et les valeurs des deux tensions les rapports nécessaires pour l'équilibre de trois forces appliquées à un point matériel, conformément à ce qu'on a vu dans les n°s 17 et suivants. La tension T_0 du premier côté est donc égale et directement opposée à la résultante de la force P_1 et de la tension T_1 du second côté. La tension T_1 est de même égale et directement opposée à la résultante de la force P_2 et de la tension T_2 du troisième côté : et ainsi de suite. D'où l'on voit, que si l'on considère un côté quelconque $m_i m_{i+1}$ du polygone, toutes les

forces $P_{i+1}, \ldots P_n$ et T_n appliquées à la suite de ce côté devront avoir une résultante unique, et que la tension T_i du côté dont il s'agit devra être égale et directement opposée à cette résultante.

Cette condition, qui est nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de l'équilibre dans le polygone funiculaire, peut s'exprimer en écrivant les équations

$$T_i \cos.a_i = P_{i+1} \cos.\alpha_{i+1} + P_{i+2} \cos.\alpha_{i+2} + \ldots\ldots + P_n \cos.\alpha_n + T_n \cos.a_n,$$
$$T_i \cos.b_i = P_{i+1} \cos.\beta_{i+1} + P_{i+2} \cos.\beta_{i+2} + \ldots\ldots + P_n \cos.\beta_n + T_n \cos.b_n,$$
$$T_i \cos c_i = P_{i+1} \cos.\gamma_{i+1} + P_{i+2} \cos.\gamma_{i+2} + \ldots\ldots + P_n \cos.\gamma_n + T_n \cos.c_n,$$

et en admettant qu'elles doivent subsister pour toutes les valeurs de i depuis $i = 0$ jusqu'à $i = n - 1$. Les équations particulières que l'on formera d'après celles-ci pour tous les côtés du polygone en commençant par l'avant-dernier, donneront toujours les moyens de déterminer les directions et les tensions des côtés lorsque les forces P seront données, et réciproquement. Il est évident que la tension T_n du dernier côté n'est autre chose que la force appliquée à l'extrémité libre du fil, et que la tension T_0 du premier côté est l'effort exercé sur le point fixe auquel la première extrémité du fil est attachée. Si cette première extrémité du fil était libre, comme l'est l'extrémité opposée, l'équilibre exigerait qu'une force égale et directement opposée à la tension T_0 lui fût appliquée.

214. Les équations précédentes peuvent être écrites d'une autre manière en observant que l'on a

$$\cos.a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{f_i}, \quad \cos.b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{f_i}, \quad \cos.c_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{f_i}.$$

Si l'on remplace cos. a_i, cos. b_i, cos. c_i par ces expressions, les équations dont il s'agit contiendront alors les coordonnées des sommets du polygone, et pourront servir à en déterminer immédiatement la position.

215. Si les directions des forces P_i partagent toujours en deux parties égales l'angle compris entre les deux côtés du polygone adjacents à leurs points d'application, la tension T est nécessairement constante dans toute l'étendue du polygone. De plus, en nommant θ_i l'angle compris entre les deux côtés adjacents au point m_i, on aura la relation

$$-P_i = 2T\cos.\frac{\theta}{2},$$

qui doit subsister pour toutes les valeurs de i.

216. Si les directions des forces P_i sont toutes parallèles entre elles, l'équilibre ne pourra subsister qu'autant que les directions de toutes les forces et tous les côtés du polygone seront compris dans un même plan. Admettons que ce plan soit celui des xy, et que les directions de toutes les forces soient parallèles à l'axe des y que l'on supposera vertical. Les trois équations du numéro 213 se réduiront aux deux suivantes,

$$T_i\cos.a_i = T_n\cos.a_n,$$
$$T_i\sin.a_i = P_{i+1} + P_{i+2} + \ldots\ldots + P_n + T_n\sin.a_n.$$

On en déduira facilement la valeur de la tension d'un côté quelconque du polygone et sa direction. Ces équations donnent

$$\text{tang.}\, a_i = \frac{P_{i+1} + P_{i+2} + \ldots\ldots + P_n + T_n\sin.a_n}{T_n\cos.a_n},$$

d'où l'on peut conclure que s'il existe dans le polygone

un côté horizontal, la tangente de l'angle d'inclinaison des côtés du polygone sur l'horizon augmentera à partir de celui-ci proportionnellement à la somme des forces comprises entre le côté horizontal et celui que l'on considère.

On voit aussi que les composantes horizontales des tensions T_0, T_n des côtés extrêmes du polygone doivent être égales entre elles ; et que la différence des composantes verticales de ces tensions doit être égale à la somme des forces verticales appliquées au fil. En général, la composante horizontale de la tension d'un côté quelconque du polygone a toujours la même valeur. Enfin on peut remarquer que si le polygone est formé de deux parties séparées par un côté horizontal, les composantes verticales des tensions T_0, T_n des côtés extrêmes seront respectivement égales à la somme des forces verticales comprises entre ce côté horizontal et l'extrémité correspondante du fil.

Cas où les points d'application des forces peuvent glisser librement le long du fil.

217. Si le point d'application m_i de la force P_i peut glisser librement le long du fil, l'équilibre ne peut évidemment subsister à moins que la direction de cette force ne partage en deux parties égales l'angle compris entre les deux côtés adjacents au point m_i ; d'où il résulte que les tensions de ces deux côtés seront égales entre elles. On aura d'ailleurs, entre les valeurs absolues de ces tensions et celle de la force, la relation exprimée par l'équation

$$-P_i = 2\cos.\frac{\theta_i}{2},$$

comme on l'a vu n° 215.

Si les points d'application de toutes les forces peuvent glisser librement le long du fil, la tension sera constante dans toute son étendue, les directions des forces partageront toujours en deux parties égales l'angle des côtés adjacents à leurs points d'application, et leurs valeurs auront avec la tension constante la relation exprimée par l'équation précédente. On aura l'exemple d'un équilibre de cette nature en concevant une série d'anneaux placés fixement d'une manière quelconque dans l'espace, dans lesquels passerait un fil. Abstraction faite de l'effet du frottement du fil dans les anneaux, l'équilibre ne pourra subsister à moins que l'on n'applique aux deux bouts du fil, dans la direction des parties extrêmes, deux forces égales et agissant en sens contraire, par lesquelles le fil sera tendu. Chaque anneau supporte alors un effort dirigé dans le plan des parties contiguës du fil et égal à la tension multipliée par $2 \cos.\frac{\theta}{2}$, θ étant l'angle compris entre ces parties.

Courbe funiculaire.

218. Reprenons les considérations exposées dans le n° 213, mais en supposant que les forces agissant sur le fil, au lieu d'être appliquées à certains points placés d'espace en espace, sont distribuées d'une manière continue dans toute l'étendue du fil. Désignons maintenant par

x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque m du fil;

s la longueur de l'arc de la courbe du fil comptée jusqu'au point m;

s_0, s_ω les longueurs de l'arc de cette courbe comptées jusqu'au premier et jusqu'au dernier point de la partie où les forces sont appliquées;

a_0, b_0, c_0 et a_ω, b_ω, c_ω les angles formés avec les axes des x, des y et des z par les tangentes menées au premier et au dernier point de cette partie du fil;

p la valeur de la force appliquée au point m, cette valeur étant rapportée à l'unité de longueur, et donnée en fonction de l'arc s;

α, β, γ les angles formés avec les axes des x, des y et des z par la direction de la force p, ces angles étant également donnés en fonction de l'arc s;

T la valeur de la tension du fil au point m;

T_0, T_ω les valeurs de la tension au premier et au dernier point de la partie du fil où les forces sont appliquées.

Le même principe énoncé dans le n° 213 donnera ici, au lieu des trois équations obtenues dans ce numéro, les suivantes

$$T\frac{dx}{ds}=\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\alpha+T_\omega\cos.a_\omega,$$

$$T\frac{dy}{ds}=\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\beta+T_\omega\cos.b_\omega,$$

$$T\frac{dz}{ds}=\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\gamma+T_\omega\cos.c_\omega;$$

qui devront subsister dans toute l'étendue de la courbe, et qui en déterminent la figure. Pour le premier point de la courbe elles deviennent

$$T_0 \cos.a_0 = T_\omega \cos.a_\omega + \int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\alpha,$$

$$T_0 \cos.b_0 = T_\omega \cos.b_\omega + \int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\beta,$$

$$T_0 \cos.c_0 = T_\omega \cos.c_\omega + \int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\gamma.$$

219. Les trois équations précédentes donnent

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\alpha + T_\omega \cos.a_\omega}{\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\gamma + T_\omega \cos.c_\omega},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\beta + T_\omega \cos.b_\omega}{\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\gamma + T_\omega \cos.c_\omega},$$

qui sont les deux équations différentielles de la courbe du fil. On en déduit également

$$T^2 = \left(\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\alpha + T_\omega \cos.a_\omega\right)^2 + \left(\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\beta + T_\omega \cos.b_\omega\right)^2$$
$$+ \left(\int_s^{s_\omega} ds.p\cos.\gamma + T_\omega \cos.c_\omega\right)^2,$$

pour l'expression du carré de la tension dans un point quelconque.

220. En différentiant les trois équations du n° 218, on a

$$Td.\frac{dx}{ds}+dT.\frac{dx}{ds}=-ds.p\cos.\alpha,$$

$$Td.\frac{dy}{ds}+dT.\frac{dy}{ds}=-ds.p\cos.\beta,$$

$$Td.\frac{dz}{ds}+dT.\frac{dz}{ds}=-ds.p\cos.\gamma.$$

Si l'on ajoute ces équations après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$; et si l'on observe que

$$\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dz^2}{ds^2}=1,$$

d'où

$$\frac{dx}{ds}.d\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}.d\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}.d\frac{dz}{ds}=0,$$

il viendra

$$-dT=p\cos.\alpha.dx+p\cos.\beta.dy+p\cos.\gamma.dz.$$

Ce résultat donne la loi d'après laquelle la tension varie d'un point à l'autre du fil. L'accroissement infiniment petit de la tension est égal à la force appliquée à l'élément du fil décomposée suivant la direction de cet élément.

221. Pour faire quelques applications des résultats précédents, on supposera en premier lieu que la force

désignée par p est dirigée partout perpendiculairement à la courbe affectée par le fil. La valeur de dT devient alors nulle, et par conséquent la tension doit être constante dans toute l'étendue du fil. De plus les trois équations du numéro précédent, qui se réduisent à

$$Td.\frac{dx}{ds}=-ds.p\cos.\alpha,$$

$$Td.\frac{dy}{ds}=-ds.p\cos.\beta,$$

$$Td.\frac{dz}{ds}=-ds.p\cos.\gamma,$$

montrent que la condition de l'équilibre du fil exige que la force qui lui est appliquée soit dirigée dans le plan osculateur de la courbe du fil, ou dans le sens du rayon de courbure de cette courbe, puisque les cosinus des angles α, β, γ doivent être respectivement proportionnels aux quantités $d.\frac{dx}{ds}$, $d.\frac{dy}{ds}$, $d.\frac{dz}{ds}$ (*Voy.* le n° 237 des *Leçons d'analyse*). En remplaçant donc ici $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$, par les expressions des cosinus des angles formés avec les axes par le rayon de courbure, dont nous désignerons la longueur par ρ, ces trois équations donneront

$$T=-p\rho, \quad \text{ou} \quad p=-\frac{T}{\rho}.$$

Ainsi quand un fil tendu est appliqué sur une surface fixe, la valeur de la pression exercée sur cette surface, rapportée à l'unité de longueur, est égale en chaque point du fil à la tension divisée par le rayon de courbure. Cette proposition s'applique à diverses questions importantes dans la *Mécanique pratique*.

La proposition dont il s'agit peut être déduite immédiatement du résultat énoncé n° 215, en observant que les points d'application des forces P_i étant supposés placés à une distance infiniment petite les uns des autres, on a

$$P_i = pds, \quad \cos.\frac{\theta_i}{2} = \sin.\frac{1}{2}\frac{ds}{\rho} = \frac{1}{2}\frac{ds}{\rho}.$$

222. Considérons maintenant le cas particulier où la force désignée par p est supposée constante et dirigée toujours parallèlement à une même ligne verticale, cas dans lequel la courbe funiculaire a reçu le nom de *chaînette*. Toutes les parties de cette courbe (fig. 27) seront placées dans un même plan vertical, conformément à ce qu'on a vu n° 216. Nous admettrons que ce plan est celui des xy, que la direction de la force p est parallèle à l'axe des y, et de plus que la première extrémité du fil est placée à l'origine des coordonnées. Enfin nous désignerons par P_0 et P_ω les composantes verticales des tensions T_0 et T_ω qui ont lieu aux deux extrémités du fil; et par Q la valeur commune des composantes horizontales de ces tensions, laquelle, conformément à la remarque faite dans le n° 216, est aussi la valeur de la composante horizontale de la tension d'un élément quelconque du fil. Les équations du n° 218 se réduiront ici à

$$T\frac{dx}{ds} = T_\omega \cos.\alpha_\omega = Q, \qquad (a)$$

$$T\frac{dy}{ds} = p(s_\omega - s) + P_\omega, \qquad (b)$$

et l'équation du n° 220 deviendra

$$dT = -p\,dy. \qquad (c)$$

Pour obtenir de la manière la plus simple l'équation de la courbe formée par le fil, on remarquera que l'équation (c) donne en intégrant

$$T = const. - py;$$

et comme l'on a pour le point A, $y = 0$ et $T = T_0$, il vient

$$T = T_0 - py. \qquad (d)$$

En substituant cette expression de T dans l'équation (a), on trouvera

$$T_0 - py = Q\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad (e)$$

d'où l'on tire

$$dx = \pm \frac{Q\,dy}{\sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}.$$

Le signe supérieur doit être pris dans la partie descendante de la courbe jusqu'au point le plus bas, et le signe inférieur dans la partie montante au delà de ce point. En intégrant, il vient

$$x = const. + \frac{Q}{p}.l\left[T_0 - py \mp \sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}\right],$$

et en déterminant la constante par la condition que $x = 0$ quand $y = 0$,

$$x = \frac{Q}{p}.l\frac{T_0 - py \mp \sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}{T_0 - P_0}. \qquad (f)$$

En repassant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$T_0 - py = \frac{1}{2}(T_0 - P_0)\, e^{\frac{px}{Q}} + \frac{1}{2}(T_0 + P_0)\, e^{-\frac{px}{Q}}, \qquad (g)$$

qui est l'équation cherchée de la chaînette.

223. Si l'on désigne par h et f l'abscisse et l'ordonnée du point le plus bas O de la courbe, dans lequel on a $\frac{dy}{dx} = 0$, les équations (e) et (f) donneront

$$h = \frac{Q}{p} \cdot l \frac{Q}{T_0 - P_0}, \quad f = \frac{T_0 - Q}{p}.$$

224. On déduit des équations (a) et (b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p(s_\omega - s) + P_\omega}{Q};$$

et en égalant cette expression de $\frac{dy}{dx}$ à celle qui se déduit de l'équation (c), on trouve

$$s = s_\omega + \frac{P_\omega \mp \sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}{p}. \qquad (h)$$

Si l'on représente par C la longueur de la courbe depuis l'origine A jusques au sommet O, le radical

$$\sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}$$

étant nul pour la valeur de y qui convient à ce point, on a

$$C = s_\omega + \frac{P_\omega}{p}, \quad \text{d'où} \quad s = C \mp \frac{\sqrt{(T_0 - py)^2 - Q^2}}{p}.$$

225. Les résultats précédents sont exprimés d'une manière plus simple quand on transporte l'origine des coordonnées en un point A′ situé dans la ligne verticale qui contient le point le plus bas O de la courbe, la distance OA′ étant égale à $\frac{Q}{p}$, et quand on compte les nouvelles ordonnées verticales y' de bas en haut. Posant en effet

$$x' = x - \frac{Q}{p} . l \frac{Q}{T_0 - P_0} \quad \text{et} \quad y' = \frac{T_0 - Py}{p},$$

il viendra, au lieu des équations (d), (f), (g) et (h),

$$T = py',$$

$$x' = \frac{Q}{p} . l \frac{py' \mp \sqrt{p^2 y'^2 - Q^2}}{Q},$$

$$y' = \frac{Q}{2p}\left(e^{\frac{px'}{Q}} + e^{-\frac{px'}{Q}}\right),$$

$$s' = \sqrt{y'^2 - \frac{Q^2}{p^2}} = \frac{Q}{2p}\left(e^{\frac{px'}{Q}} - e^{-\frac{px'}{Q}}\right).$$

On peut remarquer de plus que le rayon de courbure, pour un point quelconque dont l'ordonnée est y', a pour expression $\frac{py'^2}{Q}$; et pour le point O, $\frac{Q}{p}$.

Les équations ci-dessus contiennent seulement la quantité Q, qui est la composante horizontale de la tension : d'après l'équation (a), cette composante conserve

la même valeur dans toute l'étendue de la courbe. On déterminera toujours par le moyen de ces équations la figure du fil, en se donnant d'avance sa longueur ou les positions relatives de ses extrémités.

226. Nous considérerons encore le cas particulier où la force verticale appliquée aux points de la courbe, au lieu d'être proportionnelle à la longueur des parties de cette courbe, comme on l'a supposé dans les n°s 222 et suivants, est proportionnelle à la projection horizontale de ces parties. On a alors, au lieu des équations (*a*), (*b*), (*c*) du n° 222,

$$T\frac{dx}{ds}=T_{\prime\prime}\cos.a_{\prime\prime}=Q, \qquad (l)$$

$$T\frac{dy}{ds}=p(x_{\prime\prime}-x)+P_{\prime\prime}, \qquad (m)$$

$$dT=-pdx.\frac{dy}{ds}=-\frac{pdy}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}. \qquad (n)$$

Les deux équations (*l*) et (*m*) donnent

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p(x_{\prime\prime}-x)+P_{\prime\prime}}{Q}, \qquad (o)$$

et en intégrant

$$y=\frac{p\left(x_{\prime\prime}x-\frac{x^2}{2}\right)+P_{\prime\prime}x}{Q}. \qquad (p)$$

La courbe du fil est donc une parabole dont l'axe est vertical.

La valeur de la tension en un point quelconque de

cette courbe, qui se déduit de l'équation (l), est

$$T=Q\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \qquad (q)$$

227. En représentant par h et f l'abscisse et l'ordonnée du point le plus bas de la courbe, où la tangente est horizontale, et qui est le sommet de la parabole, les équations (o) et (p) donneront

$$h=x_0+\frac{P_0}{p}, \quad f=\frac{p}{2Q}\left(x_0+\frac{P_0}{p}\right)^2.$$

Quant à la longueur de l'arc, on l'obtiendra par les procédés connus en intégrant l'expression $dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, dans laquelle on remplacera $\frac{dy}{dx}$ par la valeur donnée par l'équation (o).

228. Si l'on veut transporter l'origine des coordonnées du point A au sommet en comptant les nouvelles ordonnées y' de bas en haut, on doit changer x en $x'+h$, y en $f-y$; et il vient en substituant ces valeurs,

$$y'=\frac{px'^2}{2Q},$$

$$\frac{P_0}{Q}=\text{tang.}a_0=\frac{2f}{h},$$

$$Q=\frac{ph^2}{2f},$$

$$T=\frac{ph^2}{2f}\sqrt{1+\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^2}.$$

En nommant s' la valeur de l'arc comptée du point A' qui répond à l'abscisse x', on aura,

$$s'=x'+\frac{h^2}{2f}\left[\frac{1}{3.2}\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^3-\frac{1}{5.8}\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^5+\frac{1}{7.16}\left(\frac{2fx'}{h^2}\right)^7-\text{etc.}\right];$$

et en faisant $x'=h$, et appelant c la valeur correspondance de s',

$$c=h\left[1+\frac{1}{3.2}\left(\frac{2f}{h}\right)^2-\frac{1}{5.8}\left(\frac{2f}{h}\right)^4+\frac{1}{7.16}\left(\frac{2f}{h}\right)^6-\text{etc.}\right].$$

Cette dernière équation donne, par le *retour des suites* : $\left(\frac{2f}{h}\right)^2=$

$$6\left[\frac{c-h}{h}+\frac{9}{10}\left(\frac{c-h}{h}\right)^2-\frac{54}{175}\left(\frac{c-h}{h}\right)^3+\frac{207}{350}\left(\frac{c-h}{h}\right)^4-\text{etc.}\right].$$

Les résultats précédents sont principalement utiles pour l'établissement des ponts supportés par des chaînes en fer. On trouvera les détails nécessaires aux applications dans l'ouvrage intitulé *Rapport et mémoire sur les ponts suspendus*.

XVI. Principe des vitesses virtuelles.

229. Les principes de la statique ont été exposés dans l'art. I, et l'on a vu que chacun d'entre eux pouvait être pris pour point de départ et servir à démontrer les autres. En effet, les principes dont il s'agit sont compris dans une proposition unique beaucoup plus générale, par laquelle les conditions auxquelles doit satisfaire tout système de forces, pour que ces forces se fassent mutuellement équilibre, sont dans tous les cas complétement exprimées.

On indiquera en premier lieu d'une manière plus

précise ce que l'on entend en général par système de forces. Nous avons considéré dans les art. I et II les conditions de l'équilibre d'un seul point matériel ; et dans les art. III et IV les conditions de l'équilibre d'un assemblage de points matériels assujettis les uns aux autres d'une manière invariable, en sorte que la figure affectée par ce système ne pouvait subir aucun changement. On peut concevoir l'existence d'un tel système en admettant que les divers points auxquels les forces sont appliquées sont réunis les uns aux autres par des verges rigides qui s'opposent à ce que les distances actuelles de ces points ne viennent à varier. Il n'est pas nécessaire d'ailleurs, pour assurer l'invariabilité de la figure du système, de supposer que tous les points matériels sont ainsi réunis deux à deux : il suffirait d'admettre, par exemple, que trois quelconques de ces points étant maintenus les uns par rapport aux autres dans des situations déterminées, le triangle invariable qu'ils forment serait la base commune de pyramides dont les autres points formeraient les sommets. Si les arêtes de ces pyramides sont parfaitement rigides, il est visible que la figure formée par l'ensemble des points matériels ne pourra subir aucun changement.

Ainsi, l'on se représente un système dont la figure est invariable, comme un assemblage de points matériels assujettis les uns aux autres par des tiges rigides, en assez grand nombre pour que les distances et les positions respectives de tous ces points ne puissent changer ; et il suffira toujours, pour satisfaire à cette condition, que les distances d'un point quelconque à trois autres points du système au moins soient rendues invariables.

220. Nous avons considéré dans l'article XV l'équilibre du polygone funiculaire, c'est-à-dire d'un assemblage de points matériels assujettis deux à deux par des fils inextensibles qui rendaient invariables les distances de deux points contigus. L'ensemble des points matériels pouvait d'ailleurs affecter une figure quelconque compatible avec la condition qui vient d'être énoncée. Dans le cas particulier du n° 217 la condition consistait seulement en ce que la somme des distances de deux ou plusieurs points contigus devrait conserver toujours une valeur déterminée et constante.

On voit par ces exemples que l'on peut considérer en général des systèmes de deux espèces : dans les uns les positions relatives des points d'application des forces ne peuvent changer; dans les autres, le mode de liaison des points matériels dont le système se compose est tel qu'il permet à ces points de prendre les uns par rapport aux autres certains mouvements assujettis à des conditions déterminées, par l'effet desquels l'ensemble de ces points peut présenter diverses figures. Un système est défini quand on donne le nombre de points matériels dont il se compose, et la manière dont ces points peuvent se déplacer les uns par rapport aux autres, ou par rapport à d'autres points supposés fixes dans l'espace.

Les machines employées dans les travaux des arts présentent autant de systèmes tels que ceux dont il s'agit. Mais nous admettrons ici que les points matériels dont l'assemblage forme le système sont réunis les uns aux autres par des verges parfaitement rigides, ou par des fils inextensibles et parfaitement flexibles, supposés sans masse. Nous concevrons que ces fils ou ces verges

rendent invariables les distances d'une partie des points du système considérés deux à deux, en permettant néanmoins à l'ensemble de ces points de prendre certains mouvements relatifs, et d'affecter diverses figures différentes les unes des autres.

231. Cela posé, nous énoncerons en premier lieu le principe des vitesses virtuelles. Nous vérifierons ensuite l'existence de ce principe dans l'équilibre des machines simples, et enfin nous en donnerons la démonstration générale.

Concevons un système quelconque, et représentons-nous la série infinie des figures que ce système peut affecter successivement sans violer les conditions de la liaison des points matériels. Ce système étant considéré dans une position déterminée, admettons que l'on ait appliqué des forces aux divers points, et que l'on demande les conditions nécessaires pour que ces forces se fassent mutuellement équilibre. On répondra à cette question de la manière suivante.

Supposons que l'on fasse subir au système un léger changement de figure, compatible avec le mode de liaisons qui constitue ce système, et par l'effet duquel les points d'application des forces aient décrit des espaces infiniment petits. Supposons de plus que les espaces décrits de cette manière par chaque point d'application aient été projetés sur les directions des forces appliquées à ce point, et désignons par δp l'espace infiniment petit décrit par le point d'application de la force P estimé dans le sens de la direction de cette force. Le produit $P.\delta p$ de la force P par l'espace δp décrit par le point d'application de cette force dans le sens de sa

direction est ce que l'on nomme le *moment virtuel* de la force P : cette quantité est regardée comme positive lorsque l'espace δp est décrit dans le sens de l'action de la force, et comme négative dans le cas contraire. Or les forces appliquées au système seront telles qu'il y aura équilibre si, prenant la somme des moments virtuels de toutes ces forces, on trouve pour cette somme une valeur nulle, en sorte que la seule équation

$$S.P.\delta p=0$$

exprime, dans tous les cas, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système.

232. Il est aisé de reconnaître l'exactitude de cette proposition dans le cas des machines simples. Dans le levier, la nature du système consiste en ce que les points d'application m,m' (fig. 28) des deux forces forment avec le point fixe A un triangle dont la figure est invariable, et qui peut tourner librement autour de ce point sans sortir du même plan qui contient aussi les directions des forces P,P'. On peut toujours supposer les côtés Am,Am' perpendiculaires sur ces directions. Soit $\delta\omega$ un angle infiniment petit décrit par le triangle autour du point A dans le sens de l'action de la force P. On aura ici

$$\delta p=Am.\delta\omega,\quad \delta p'=-Am'.\delta\omega.$$

L'équation précédente devient donc

$$P.Am.\delta\omega-P'.Am'.\delta\omega=0 \quad \text{ou} \quad P.Am=P'.Am'.$$

La même remarque s'applique évidemment au treuil ou au cabestan.

233. Considérons deux poids P,P' (fig. 29) attachés aux extrémités d'un fil passant sur la poulie fixe A, et

dont le dernier est en partie supporté par le plan incliné AC. La nature du système consiste ici en ce que le poids P ne peut se mouvoir que verticalement, le poids P′ ne peut se mouvoir que parallèlement à AC, et la longueur du fil doit être invariable. Or si l'on imprime au système des deux poids un mouvement par lequel P descende verticalement de δp, P′ s'élèvera verticalement de $\delta p.\frac{AB}{AC}$. La condition de l'équilibre est donc

$$P.\delta p - P'.\delta p.\frac{AB}{AC} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{P}{P'} = \frac{AB}{AC}.$$

234. Soit une vis verticale au moyen de laquelle un poids Q suspendu à l'écrou mobile est maintenu en équilibre par une force horizontale appliquée tangentiellement à la circonférence d'un cercle lié à cet écrou. Désignons par h le pas de la vis, et par r le rayon du cercle. Si la vis tourne de la quantité angulaire $\delta\omega$, le point d'application de P décrira dans le sens de cette force l'espace $r.d\omega$, et le poids Q s'élèvera de la quantité $\frac{h.\delta\omega}{2\pi}$, π désignant le rapport de la circonférence au diamètre. Le principe des vitesses virtuelles donne donc pour la loi de l'équilibre :

$$P.r\delta\omega - Q.\frac{h.\delta\omega}{2\pi} = o \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi r}.$$

235. Les conditions de l'équilibre dans le coin ne diffèrent pas des conditions de l'équilibre de trois forces dirigées dans un même plan et appliquées à un seul point matériel. Cette question a été traitée dans les n°s 28 et suivants.

226. Quel que soit le système que l'on considère, on reconnaîtra facilement, comme on l'a fait dans les numéros précédents, que les conditions de l'équilibre déduites des principes ordinaires ne diffèrent point de celles qui résultent de l'application du principe des vitesses virtuelles. Mais indépendamment de ces vérifications particulières, on peut démontrer en général, sans spécifier aucunement la nature du système, qu'en égalant à zéro la somme des moments virtuels des forces, on exprime complétement dans tous les cas les conditions de l'équilibre.

Considérons un système quelconque, et les forces qui lui sont appliquées. Chaque force peut toujours être remplacée par un poids attaché à un fil parfaitement flexible, passant sur une ou plusieurs poulies de renvoi, et dont l'extrémité serait liée au point d'application de la force. Cela posé, concevons un levier ayant la liberté de tourner dans un plan vertical autour d'un axe horizontal fixe, et imaginons que le poids qui représente la force quelconque P (fig. 29) appliquée au système ait été amené dans le plan du levier; la distance AM étant tellement déterminée que le point M du levier décrive autour d'un point fixe A, dans un certain déplacement infiniment petit du système, l'espace δp décrit par le point d'application de la force P dans le sens de l'action de cette force. La même chose ayant été faite pour toutes les forces, on verra, par le raisonnement employé n° 10, que, sans altérer les conditions de l'équilibre du système, on peut supposer le levier lié ou non d'une manière invariable aux cordons qui soutiennent les poids P, et que ces poids ne peuvent se faire équilibre

sur le système seul, sans se faire également équilibre sur le levier seul. Mais l'équilibre du levier exige que la somme des produits P.AM soit nulle, et l'on peut substituer aux rayons AM les arcs infiniment petits décrits simultanément par les points M, qui sont proportionnels à ces rayons. Donc on doit avoir, si l'équilibre existe, $S.P.\delta p=0$ pour un déplacement quelconque infiniment petit des parties du système, et cette condition assure effectivement dans un système quelconque, aussi bien que dans un levier, l'existence de l'équilibre.

237. Nous citerons encore la démonstration suivante, qui a été donnée par Lagrange. Soient m, m', m'', etc. (fig. 30), les points du système auxquels les forces P, P′,P″,... sont appliquées. On peut toujours, au moyen de plusieurs moufles mobiles A,A′,A″, etc., et fixes B, B′,B″, etc., placées dans les directions de ces forces, et embrassées par un seul fil, remplacer toutes leurs actions par celle d'un poids unique R attaché à l'extrémité de ce fil. Et si l'on suppose le poids R égal à l'unité, les quantités P,P′,P″, etc., seront respectivement égales au nombre de cordons parallèles par lesquels les moufles mobiles attachées aux points m,m',m'',... sont respectivement sollicitées. Cela posé, supposons le système en équilibre, et par conséquent le poids R immobile. Imaginons ensuite que l'on fasse subir au système un déplacement très-petit, et soient $\delta p,\delta p',\delta p''$, etc., les espaces parcourus en vertu de ce déplacement par les points m, m', m'', etc., suivant les directions des forces qui les sollicitent. L'espace parcouru par le poids R sera évidemment

$$P\delta p+P'\delta p'+P''\delta p''+\text{etc.}$$

Or on peut affirmer que si le système est en équilibre dans sa position actuelle, cette quantité sera nulle. En effet, elle ne peut pas être positive, car si le poids R devait descendre par suite du déplacement supposé, comme sa tendance à descendre subsiste toujours, il ne se tiendrait pas immobile comme on le suppose. La quantité dont il s'agit ne peut pas être non plus négative ; car lorsqu'un déplacement est possible dans un système, un déplacement pareil, mais en sens contraire, l'est également ; et si la quantité

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \text{etc.}$$

était négative pour l'un, elle serait positive pour l'autre. Donc quand l'équilibre subsiste, cette quantité est nécessairement nulle. De plus, si elle est nulle, et par conséquent si le poids R demeure immobile, quel que soit le déplacement très-petit que l'on fasse subir au système, il y aura nécessairement équilibre, puisque les points m, m', m'', etc., n'auront pas plus de tendance à se mouvoir dans un sens quelconque que dans le sens opposé.

Démonstration générale du principe des vitesses virtuelles.

238. Les notions qui viennent d'être exposées ne peuvent laisser aucun doute sur la généralité du principe dont il s'agit, principe dont on déduira toujours dans chaque cas particulier les conditions de l'équilibre. Mais à raison de l'importance de cette proposition il convient de la considérer encore sous un autre point

de vue, plus propre à en faire reconnaître la nature et concevoir le véritable sens.

Soit un système quelconque défini conformément à ce qui a été dit n° 230, et désignons généralement par m_1, m_2, m_3, etc., les divers points de ce système. P_1 représentera l'une quelconque des forces appliquées au point m_1, et p_1 la distance que cette force tend à augmenter; P_2 représentera l'une quelconque des forces appliquées au point m_2, et p_2 la distance que cette force tend à augmenter; et ainsi des autres. Nous supposerons d'abord le système entièrement libre de se déplacer d'une manière quelconque dans l'espace.

Il s'agit d'exprimer les conditions de l'équilibre des forces P_1, P_2, P_3, etc. Or, quel que puisse être le mode de liaison des points du système, les actions des forces P_1, P_2, P_3, etc., ne peuvent se détruire réciproquement, sans qu'il s'établisse certains efforts de compression ou d'extension dans les directions des verges ou fils qui unissent les points du système, et qui s'opposent à la variation des distances d'une partie de ces points considérés deux à deux. Tous les liens existants dans le système peuvent être ainsi sollicités, ou il peut se faire qu'une partie seulement de ces liens soit contractée ou tendue. Nous appelons ces efforts *forces intérieures*, en les distinguant des forces P_1, P_2, P_3, etc., qui sont appliquées extérieurement au système. Nous désignerons par F_1 l'un quelconque des efforts intérieurs qui s'exercent entre le point m_1 et un autre point du système, et par f_1 la distance que cet effort tend à augmenter, distance qui est prise sur la direction de la ligne qui joint les deux points. Nous désignerons égale-

ment par F_2 l'un quelconque des efforts intérieurs qui s'exercent entre le point m_2 et un autre point du système, et par f_2 la distance prise sur la ligne de jonction de ces deux points que la force F_2 tend à augmenter, etc.

Cela posé, l'équilibre général du système ne peut subsister à moins que chacun des points m_1, m_2, m_3, etc., ne soit séparément en équilibre sous l'action des forces extérieures et des efforts intérieurs qui lui sont appliqués. L'existence de cet équilibre exige donc, d'après ce qu'on a vu n° 30, que l'on ait séparément les équations

$$0 = S.P_1.\delta p_1 + S.F_1.\delta f_1,$$
$$0 = S.P_2.\delta p_2 + S.F_2.\delta f_2,$$
$$0 = S.P_3.\delta p_3 + S.F_3.\delta f_3,$$
etc. ;

qui seront en même nombre que les points matériels du système, et dans lesquelles les valeurs des variations δp_1, δp_2, δp_3, etc., et δf_1, δf_2, δf_3, etc., peuvent résulter d'un déplacement quelconque attribué à chacun de ces points.

239. Mais comme les points m_1, m_2, m_3, etc., sont supposés ici former un système, ils ne peuvent se déplacer que d'une manière conforme à la nature des liaisons établies entre ces points et qui constituent le système, ce qui restreint la généralité des valeurs qui peuvent être attribuées dans les équations précédentes aux variables δp_1, δp_2, δp_3, etc., et δf_1, δf_2, δf_3, etc. Cette restriction nécessaire ayant lieu, on peut affirmer que quel que soit le changement de figure infiniment petit subi par le système, si l'on vient à ajouter toutes les

équations du numéro précédent, les moments virtuels dus aux forces intérieures se détruiront toujours réciproquement et disparaîtront entièrement du résultat, en sorte que l'on aura l'équation

$$0 = S.P_1.\delta p_1 + S.P_2.\delta p_2 + S.P_3.\delta p_3 + \text{etc.},$$

ou simplement

$$0 = S.P.\delta p.$$

$P.\delta p$ représente ici généralement le moment virtuel de l'une quelconque des forces appliquées extérieurement au système ; c'est-à-dire le produit de la force par l'espace infiniment petit parcouru par son point d'application dans le sens de sa direction, lorsqu'on fait subir au système un changement de figure quelconque sans violer les conditions de la liaison des points matériels.

Pour reconnaître la vérité de cette proposition, considérons deux quelconques des points matériels m_1, m_2, et admettons qu'il existe entre ces points une tige rigide qui empêche leur distance de subir aucune variation. Si l'équilibre des forces extérieures P_1, P_2, P_3, etc., exige qu'il s'établisse un effort dans le sens de la ligne m_1, m_2, cet effort donnera lieu à comprendre dans l'équation relative au point m_1, une force F_1 qui sera dirigée suivant $m_1 m_2$ dans un certain sens. Il faudra de plus comprendre dans l'équation relative au point m_2 une force F_2 égale à F_1, dirigée suivant la même ligne $m_1 m_2$ dans le sens opposé. Or on voit facilement que quels que puissent être les déplacements des points m_1 et m_2 quand on fera subir au système un changement de figure infiniment petit, les conditions de la liaison exigeant que la distance $m_1 m_2$ ne varie pas, les moments

virtuels des deux forces F_1 et F_2 seront nécessairement égaux et de signes contraires (en négligeant une quantité infiniment petite du second ordre). Donc ces moments se détruiront réciproquement lorsqu'on ajoutera les équations du n° 238. La même remarque peut s'appliquer à tous les efforts intérieurs qui s'établissent dans les parties du système, efforts qui donnent toujours lieu à deux actions égales et contraires. Ainsi l'on est assuré que l'existence de l'équilibre dans un système quelconque entièrement libre exige nécessairement l'existence de l'équation $S.P.\delta p=0$.

240. Il est facile de reconnaître d'ailleurs que si le système n'est pas entièrement libre, c'est-à-dire si quelques-uns des points sont fixes, ou assujettis à se mouvoir sur des surfaces courbes ou des lignes courbes données, cette même équation doit encore subsister dans le cas de l'équilibre. En effet, on peut toujours, sans altérer l'équilibre, supprimer les obstacles par lesquels les points sont retenus, pourvu qu'on les remplace par des forces extérieures égales aux efforts que ces obstacles supportaient, et considérer alors le système comme libre. Or il est évident que pour tous les déplacements compatibles avec la nature du système, les moments virtuels de ces forces extérieures par lesquels les obstacles seront remplacés, seront nécessairement nuls, puisque les points matériels ne peuvent se déplacer dans le sens de ces efforts. Ainsi l'équation $S.P.\delta p=0$ subsistera sans qu'il soit nécessaire d'y introduire les efforts dont il s'agit.

241. Il est démontré par ce qui précède que l'équilibre ne peut exister dans un système quelconque sans que

l'équation $S.P.\delta p=0$ subsiste pour toutes les valeurs des variations δp compatibles avec les conditions de la liaison des points d'application des forces extérieures P. On reconnaîtra de plus que si cette équation a lieu, les forces P se font nécessairement équilibre sur le système. En effet, admettons que l'équation $S.P.\delta p=0$ étant vérifiée par les valeurs des forces P, l'équilibre ne subsiste pas, en sorte que le système soumis à l'action de ces forces subisse un changement de figure quelconque que nous supposerons très-petit. On pourrait évidemment prévenir ce changement de figure, et mettre le système en équilibre, en appliquant à chacun des points m_1, m_2, m_3, etc., de nouvelles forces Q_1, Q_2, Q_3, etc., dans les directions contraires aux espaces δq_1, δq_2, δq_3, etc., que les points matériels auront parcourus. Et puisque le système est actuellement en équilibre, on aura

$$S.P.\delta p+S.Q.\delta q=0,$$

qui se réduit à

$$S.P.\delta q=0,$$

le premier terme étant nul par hypothèse. Or, comme les forces Q ont été appliquées dans un sens contraire à celui où se sont mus les points m pour parcourir les espaces δq, tous les moments virtuels $Q.\delta q$ sont négatifs. Donc on ne peut satisfaire à l'équation $S.Q.\delta q=0$ sans supposer nulles toutes les forces Q_1, Q_2, Q_3, ce qui démontre la proposition énoncée.

Usage du principe des vitesses virtuelles pour la recherche des conditions d'équilibre d'un système de forces.

242. Les points du système étant rapportés à des coordonnées rectangulaires, soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m_1. Désignons également par x_2, y_2, z_2 les coordonnées du point m_2, et ainsi des autres. La composition du système, ou les conditions de la liaison des points d'application des forces, seront exprimées par certaines équations subsistantes entre les coordonnées des points m_1, m_2, m_3, etc. Par exemple, si la distance des deux points m_1, m_2 devait conserver toujours une valeur constante f, on aurait l'équation

$$f-\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=0.$$

Si le point m_1 était assujetti à se mouvoir sur une surface fixe donnée, ses coordonnées x_1, y_1, z_1 devraient satisfaire constamment à l'équation de cette surface ; et si le même point devait se mouvoir sur une ligne fixe donnée, elles devraient satisfaire constamment aux deux équations qui déterminent cette ligne.

En général les coordonnées x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, etc., des points m_1, m_2, m_3, etc., doivent être regardées comme étant assujetties à satisfaire constamment à plusieurs équations de condition

$$L=0, \quad M=0, \quad N=0, \quad \text{etc.},$$

qui expriment la nature des liaisons établies entre les points qui constituent le système, et dans lesquelles L, M, N, etc., peuvent représenter des fonctions quelconques de ces coordonnées. Il faut remarquer toutefois

que le nombre des équations dont il s'agit, distinctes les unes des autres, doit être moindre que le triple du nombre des points m_1, m_2, m_3, etc. ; car s'il lui était seulement égal, toutes les coordonnées étant déterminées, les points du système seraient fixes dans l'espace.

243. Cela posé, chaque force P appliquée au système peut être remplacée par ses trois composantes X, Y, Z parallèles aux axes des x, des y et des z. L'équation donnée par le principe des vitesses virtuelles, et exprimant l'égalité à zéro de la somme des moments virtuels de toutes les forces appliquées au système, sera donc

$$S.X.\delta x + S.Y.\delta y + S.Z.\delta z = 0; \qquad (A)$$

c'est-à-dire

$$X_1\delta x_1 + Y_1\delta y_1 + Z_1\delta z_1 + X_2\delta x_2 + Y_2\delta y_2 + \text{etc.} = 0.$$

Dans cette équation, les variations δx, δy, δz des coordonnées de chaque point du système ne peuvent prendre que des valeurs conformes au mode de liaison de ces points. Donc elles sont assujetties à satisfaire aux équations que l'on obtiendra en différentiant les équations de condition $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., par rapport aux coordonnées x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3, etc.; et marquant les différentielles par le signe δ. Ainsi posant de plus les équations

$$\delta L = 0, \ \delta M = 0, \ \delta N = 0, \text{ etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (B)$$

c'est-à-dire

$$\frac{dL}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dL}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dL}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dL}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dL}{dy_2}\delta y_2 + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{dM}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dM}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dM}{dz_1}\delta z_1 + \frac{dM}{dx_2}\delta x_2 + \frac{dM}{dy_2}\delta y_2 + \text{etc.} = 0,$$

$$\frac{dN}{dx_1}\delta x_1+\frac{dN}{dy_1}\delta y_1+\frac{dN}{dz_1}\delta z_1+\frac{dN}{dx_2}\delta x_2+\frac{dN}{dy_2}\delta y_2+\text{etc.}=0,$$

on devra les réunir à l'équation (A) pour éliminer autant des variations δx_1, δy_1, δz_1; δx_2, δy_2, δz_2; δx_3, etc., que le nombre des équations de condition le permettra. Les variations restantes après cette élimination demeurant entièrement indéterminées, on devra égaler séparément à zéro chacun de leurs coefficients. Les équations obtenues de cette manière exprimeront toujours les conditions auxquelles doivent satisfaire les forces

$$X_1, Y_1, Z_1;\ X_2, Y_2, Z_2, X_3, \text{etc.},$$

pour qu'elles se fassent mutuellement équilibre sur le système.

244. Nous remarquerons maintenant que ces équations finales peuvent être obtenues soit par les procédés ordinaires en prenant dans les équations (B) les valeurs de celles des variations

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1;\ \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2;\ \delta x_3, \text{etc.},$$

que l'on veut éliminer, et substituant ces valeurs dans l'équation (A); soit par un autre procédé appelé méthode des multiplicateurs, qui consiste à multiplier chacune des équations (B) par un facteur constant indéterminé, à les ajouter à l'équation (A), et à considérer ensuite cette équation comme la seule à laquelle il s'agisse de satisfaire. En désignant par λ, μ, ν, etc., les facteurs dont il s'agit, on formera donc ainsi l'équation

$$S.X.\delta x+S.Y.\delta y+S.Z.\delta z+\lambda.\delta L+\mu.\delta M+\nu.\delta N+\text{etc.}=0\ldots \quad (C)$$

Égalant séparément à zéro le coefficient de chacune des variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, δy_2, δz_2, etc., on aura un nombre d'équations égal au nombre des coordonnées des points du système. Si l'on élimine ensuite entre ces équations les coefficients indéterminés λ, μ, ν, etc., les équations finales ainsi obtenues ne différeront point de celles que l'on aurait trouvées par la méthode ordinaire de l'élimination, comme il est facile de s'en assurer. On remarquera d'ailleurs que ces équations finales réunies aux équations de condition

$$L=0, M=0, N=0, \text{ etc.},$$

sont en nombre égal au nombre des coordonnées des points du système, en sorte que la figure du système est entièrement déterminée lorsque les forces X, Y, Z sont données, et réciproquement.

245. La remarque précédente donne lieu à en faire une autre plus importante. Poser l'équation (C) et égaler séparément à zéro les termes contenant chacune des variations

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1 ; \ \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2 ; \ \delta x_3, \text{ etc.},$$

c'est faire ce qui devrait être fait si chaque point du système était entièrement libre ; et si, outre les forces désignées par

$$X_1, Y_1, Z_1 ; \ X_2, Y_2, Z_2 ; \ X_3, \text{ etc.},$$

on eût appliqué encore à chaque point d'autres forces dont les moments virtuels seraient représentés par les termes qui résultent de l'introduction des quantités $\lambda\delta L$, $\mu\delta M$, $\nu\delta N$, etc., dans cette équation. Pour fixer les

idées, supposons que dans l'équation $L = 0$ il n'entre que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point m_1. Le terme $\lambda.\delta L$ de l'équation (C) reviendra à

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}.\delta x_1 + \lambda \frac{dL}{dy_1}.\delta y_1 + \lambda \frac{dL}{dz_1}.\delta z_1.$$

Donc ce terme représente véritablement la somme des moments virtuels de trois forces

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}, \lambda \frac{dL}{dy_1}, \lambda \frac{dL}{dz_1},$$

appliquées au point m_1, et dirigées respectivement dans le sens des x, des y et des z. Supposons que la fonction L contienne encore les coordonnées x_2, y_2, z_2 du point m_2, le terme $\lambda.\delta L$ de l'équation (C) présentera de plus la quantité

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}.\delta x_2 + \lambda \frac{dL}{dy_2}.\delta y_2 + \lambda \frac{dL}{dz_2}.\delta z_2,$$

c'est-à-dire la somme des moments virtuels de trois forces

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}, \lambda \frac{dL}{dy_2}, \lambda \frac{dL}{dz_2},$$

supposées appliquées au point m_1, et dirigées respectivement dans le sens des x, des y et des z. Et ainsi des autres.

Nous ajouterons que les forces

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}, \lambda \frac{dL}{dy_1}, \lambda \frac{dL}{dz_1},$$

appliquées au point m_1 et dirigées parallèlement aux

x, aux y et aux z, peuvent être regardées comme les trois composantes d'une force unique dont la valeur est

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx_1}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy_1}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz_1}\right)^2},$$

force qui serait dirigée dans le sens de la normale à la surface que représente l'équation $L=0$, lorsqu'on y regarde les coordonnées x_1, y_1, z_1 comme seules variables. De même les forces

$$\lambda\frac{dL}{dx_2},\ \lambda\frac{dL}{dy_2},\ \lambda\frac{dL}{dz_2},$$

appliquées au point m_2, peuvent être regardées comme les trois composantes d'une force unique dont la valeur est

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx_2}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy_2}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz_2}\right)^2},$$

et qui serait dirigée dans le sens de la normale à la surface que représente l'équation $L=0$ lorsqu'on y regarde les coordonnées x_2, y_2, z_2 comme seules variables. Et ainsi des autres. Les forces dont il s'agit représentent évidemment les résistances qu'opposent les parties du système aux efforts qui tendent à déplacer les points ou à changer leurs distances actuelles. Et c'est par cette raison qu'il est permis de considérer chaque point du système comme entièrement libre, lorsque l'on tient compte de ces mêmes forces.

On voit par ce qui précède que toute équation $L=0$, entre les coordonnées des points du système, exprime

l'existence de liens établis entre ces points, et concourent à l'équilibre du système comme le feraient les forces

$$\lambda \frac{dL}{dx_1}, \lambda \frac{dL}{dy_1}, \lambda \frac{dL}{dz_1},$$

appliquées au point m_1 parallèlement aux axes; les forces

$$\lambda \frac{dL}{dx_2}, \lambda \frac{dL}{dy_2}, \lambda \frac{dL}{dz_2},$$

appliquées au point m_2 : et ainsi de suite. Le coefficient λ reste indéterminé. Une autre équation de condition $M = 0$, entre les mêmes coordonnées, équivaut de même aux forces

$$\mu \frac{dM}{dx_1}, \mu \frac{dM}{dy_1}, \mu \frac{dM}{dz_1},$$

appliquées au point m_1, et aux forces

$$\mu \frac{dM}{dx_2}, \mu \frac{dM}{dy_2}, \mu \frac{dM}{dz_2},$$

appliquées au point m_2, etc. Le coefficient μ reste également indéterminé. Il en est de même à l'égard des autres équations de condition.

246. On voit en outre que la méthode indiquée n° 244 conduit à déterminer les conditions de l'équilibre d'une manière tout à fait indépendante des valeurs que pourraient prendre les indéterminées λ, μ, ν, etc. Mais cette méthode donne aussi le moyen de trouver les valeurs de ces quantités, ce qui fait connaître les efforts supportés par

les parties du système. En effet, l'équation (C) donne autant d'équations distinctes qu'il y a de coordonnées des points du système ; et si l'on réunit à ces équations les équations de condition $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., qui sont en même nombre que les indéterminées λ, μ, ν, etc., on a toujours autant d'équations qu'il est nécessaire pour déterminer les coordonnées de tous les points et les quantités λ, μ, ν, etc., quand les forces sont données ; ou pour déterminer les forces appliquées à tous les points dans le sens de chaque axe, et les quantités λ, μ, ν, etc., quand la figure du système est donnée.

247. Il peut arriver que les équations $L=0$, $M=0$, $N=0$, etc., ne donnent que d'une manière imparfaite ou incomplète la constitution du système. Par exemple, si l'on veut exprimer par une de ces équations que le point m est assujetti à demeurer sur une surface fixe donnée, cette équation indiquera que le point ne peut se mouvoir suivant la direction de la normale à la surface, ni dans un sens, ni dans l'autre, et qu'il peut seulement se déplacer suivant une ligne quelconque dirigée dans le plan tangent ; et cependant il est possible que le point ait la liberté de se mouvoir en tous sens, extérieurement au corps terminé par la surface. De même, une équation, exprimant que la distance de deux points est invariable, conviendra au cas où ces points sont réunis par une verge inflexible et inextensible ; mais s'ils sont réunis par un fil, l'équation n'indiquera pas suffisamment l'état du système, car la présence de ce fil prévient seulement les déplacements par l'effet desquels la distance des deux points est augmentée. On doit conclure de cette observation que les résultats auxquels

on se trouve conduit par l'application du principe des vitesses virtuelles ne suffisent pas toujours pour déterminer complétement les conditions de l'équilibre, et qu'il faut encore examiner, d'après les signes dont les valeurs des quantités λ, μ, ν, etc., se trouveront affectées, quel est le sens des efforts supportés par les liens ou par les obstacles fixes qui font partie du système, et si, d'après ce sens, les résistances nécessaires à l'équilibre auront réellement lieu.

Exemples de l'application du principe des vitesses virtuelles.

248. On a vu, dans l'article II, l'application du principe des vitesses virtuelles à la recherche des conditions de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un seul point. Considérons maintenant un système de points matériels liés entre eux d'une manière invariable et formant un corps solide. Pour appliquer ici ce principe, on doit déterminer, dans l'équation générale (A) du n° 243

$$S.X\delta x + S.Y\delta y + S.Z\delta z = 0,$$

les variations $\delta x, \delta y, \delta z$, d'après la condition que dans un déplacement quelconque subi par le corps, tous les points matériels conservent leurs positions respectives et leurs distances mutuelles.

Pour parvenir aux équations d'équilibre, concevons les points du corps rapportés à un nouveau système de coordonnées rectangulaires x', y', z'; nous aurons

$$x=\alpha+ax'+by'+cz',$$
$$y=\beta+a'x'+b'y'+c'z',$$
$$z=\gamma+a''x''+b''y''+c''z'',$$

en désignant par α,β,γ, les coordonnées de la nouvelle origine, et faisant

$$a=\cos.\widehat{xx'},\quad b=\cos.\widehat{xy'},\quad c=\cos.\widehat{xz'},$$
$$a'=\cos.\widehat{yx'},\quad b'=\cos.\widehat{yy'},\quad c'=\cos.\widehat{yz'},$$
$$a''=\cos.\widehat{zx'},\quad b''=\cos.\widehat{zy'},\quad c''=\cos.\widehat{zz'};$$

d'où résultent les relations

$$a^2+a'^2+a''^2=1,\quad b^2+b'^2+b''^2=1,\quad c^2+c'^2+c''^2=1,$$
$$ab+a'b'+a''b''=0,\ ac+a'c'+a''c''=0,\ bc+b'c'+a''c''=0,$$

qui laissent indéterminées trois des quantités a,b,c, etc. Or le système proposé étant un corps solide, si l'on conçoit que les axes des x',y',z' fassent partie de ce système, un déplacement quelconque changera la position de ces axes, ainsi que les coordonnées x,y,z, mais ne changera pas les coordonnées x',y',z'. On peut donc différentier les équations précédentes en regardant x',y',z' comme constantes, ce qui donnera, en marquant les différentielles par le signe δ,

$$\delta x=\delta\alpha+x'\delta a+y'\delta b+z'\delta c,$$
$$\delta y=\delta\beta+x'\delta a'+y'\delta b'+z'\delta c',$$
$$\delta z=\delta\gamma+x'\delta a''+y'\delta b''+z'\delta c''.$$

Supposons maintenant qu'avant le déplacement, les axes des x',y',z' coïncidaient avec les axes des x,y,z. On aura $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$; et par conséquent $a=1$, $b=0$,

$c=0$; $a'=0$, $b'=1$, $c'=0$; $a''=0$, $b''=0$, $c''=1$. Ainsi nous pouvons écrire

$$\delta x=\delta\alpha+x\delta a+y\delta b+z\delta c\,,$$
$$\delta y=\delta\beta+x\delta a'+y\delta b'+z\delta c'\,,$$
$$\delta z=\delta\gamma+x\delta a''+y\delta b''+z\delta c''\,;$$

ou bien, comme les équations de condition étant différentiées se réduisent, à cause des valeurs précédentes, à $\delta a=0$, $\delta b'=0$, $\delta c''=0$; $\delta b+\delta a'=0$; $\delta c+\delta a''=0$; $\delta c'+\delta b''=0$;

$$\delta x=\delta\alpha+y\delta b-z\delta a''\,,$$
$$\delta y=\delta\beta-x\delta b+z\delta c'\,,$$
$$\delta z=\delta\gamma+x\delta a''-y\delta c'\,,$$

où les quantités $\delta a''$, δb, $\delta c'$, sont entièrement arbitraires. Nous sommes maîtres d'ailleurs d'écrire au lieu de ces expressions

$$\delta x=\delta\alpha+y\delta\psi-z\delta\omega\,,$$
$$\delta y=\delta\beta-x\delta\psi+z\delta\varphi\,,$$
$$\delta z=\delta\gamma+x\delta\omega-y\delta\varphi\,,$$

en désignant par $\delta\varphi$, $\delta\omega$ et $\delta\psi$ trois angles quelconques infiniment petits. Il reste à distinguer ce que représentent ces angles, qui se trouvent substitués respectivement à $\delta c'$, $\delta a''$ et δb. Or, dans l'hypothèse de la coïncidence primitive des axes des x', y', z' avec les axes des x, y, z, $\delta c'$ est le cosinus de l'angle qui s'établit entre l'axe des y et l'axe des z', cosinus dont la valeur ne diffère point de celle de l'angle décrit par le système autour de l'axe des x. De même $\delta a''$ est le cosinus de l'angle

qui s'établit entre l'axe des z et celui des x', dont la valeur est égale à celle de l'angle dont le système tourne autour de l'axe des y. Enfin, δh est le cosinus de l'angle qui s'établit entre l'axe des x et l'axe des y', dont la valeur est égale à celle de l'angle dont le système a tourné autour de l'axe des z. Donc les trois angles infiniment petits $\delta\varphi, \delta\omega, \delta\psi$, expriment respectivement dans les formules précédentes les déplacements angulaires autour des axes des x, des y et des z. Ces angles sont supposés positifs lorsque, considérant l'angle trièdre formé par les parties positives des axes, la rotation a lieu de x vers z, de z vers y, et de y vers x.

Il résulte de ce qui précède que l'on représentera un déplacement arbitraire infiniment petit des points d'un corps solide en admettant que tous ces points se sont transportés des quantités $\delta x, \delta\xi, \delta\gamma$, dans le sens des trois axes des coordonnées ; et que ces mêmes points ont décrit autour des trois axes les angles $\delta\varphi, \delta\omega, \delta\psi$. Les valeurs des quantités $\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma$ et $\delta\varphi, \delta\omega, \delta\psi$, sont entièrement arbitraires et communes à tous les points du corps. Les formules précédentes expriment les variations que subissent les coordonnées de chaque point par l'effet de ces mouvements.

Si maintenant on substitue les valeurs précédentes de $\delta x, \delta y, \delta z$, dans l'équation donnée par le principe des vitesses virtuelles qui est posée au commencement de ce numéro, on aura

$$\begin{aligned} &S.X(\delta\alpha + y\delta\psi - z\delta\omega) + S.Y(\delta\beta - x\delta\psi + z\delta\varphi) \\ &\quad + S.Z(\delta\gamma + x\delta\omega - y\delta\varphi) = 0; \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, à cause de l'indépendance de α, β, etc. :

$$S.X=0, \qquad S.(Xy-Yx)=0,$$
$$S.Y=0, \qquad S.(Yz-Zy)=0,$$
$$S.Z=0, \qquad S.(Zx-Xx)=0.$$

Ces dernières équations expriment complétement les conditions de l'équilibre du corps solide, conformément à ce qu'on a vu n° 54.

249. Il importe d'observer que le déplacement d'un point quelconque d'un corps solide, représenté par les expressions

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= y\delta\psi - z\delta\omega, \\ \delta y &= z\delta\varphi - x\delta\psi, \\ \delta z &= x\delta\omega - y\delta\varphi, \end{aligned}\right\} \quad (m)$$

et résultant de trois mouvements de rotation exécutés autour des trois axes des x, des y et des z, peut toujours être considéré comme étant dû à un seul mouvement de rotation qui aurait lieu autour d'une certaine ligne passant par l'origine des coordonnées. En effet, 1° si l'on pose $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$, c'est-à-dire

$$y\delta\psi - z\delta\omega = 0, \quad z\delta\varphi - x\delta\psi = 0, \quad x\delta\omega - y\delta\varphi = 0,$$

ou bien

$$\frac{x}{\delta\varphi} = \frac{y}{\delta\omega} = \frac{z}{\delta\psi},$$

on voit que les coordonnées qui satisfont à ces équations appartiennent à une ligne droite passant par l'origine et formant avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{\delta\varphi}{\sqrt{\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2}}, \quad \frac{\delta\omega}{\sqrt{\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2}}, \quad \frac{\delta\psi}{\sqrt{\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2}};$$

d'où il résulte que les points placés sur cette ligne droite que nous nommerons *l'axe de rotation*, sont demeurés immobiles.

2° On reconnaît que tous les autres points du corps ont tourné autour de l'axe de rotation ; car si ce mouvement a eu lieu, l'arc infiniment petit décrit par l'un quelconque de ces points, dont les projections sur les axes sont $\delta x, \delta y, \delta z$, sera perpendiculaire, 1° à l'axe de rotation, ce qui est exprimé par l'équation :

$$\delta\varphi.\delta x + \delta\omega.\delta y + \delta\psi.\delta z = 0 ;$$

2° à la ligne menée de ce point à l'origine des coordonnées, ce qui est exprimé par l'équation

$$x.\delta x + y.\delta y + z.\delta z = 0.$$

Or les expressions (m) de $\delta x, \delta y, \delta z$, satisfont effectivement aux deux équations précédentes.

On obtient l'angle $\delta\theta$ décrit par tous les points du corp autour de l'axe de rotation en observant que l'espace parcouru par un point quelconque est $\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$, ou en mettant pour $\delta x, \delta y, \delta z$, les valeurs ($m$),

$$\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(\delta\varphi^2+\delta\omega^2+\delta\psi^2) - (x\delta\varphi + y\delta\omega + z\delta\psi)^2}.$$

Or, si le point est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par l'origine des coordonnées, le second terme de la quantité qui est sous le radical est nul, et $x^2+y^2+z^2$ est le rayon de l'arc qui a été décrit. Donc

$$\delta\theta = \sqrt{\delta\varphi^2 + \delta\omega^2 + \delta\psi^2}.$$

Ainsi les mouvements de rotation exécutés autour de divers axes se composent et se décomposent suivant les mêmes lois que les mouvements rectilignes. L'axe de la rotation $\delta\theta$ est la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur trois lignes proportionnelles aux rotations composantes $\delta\varphi, \delta\omega, \delta\psi$, et la rotation résultante $\delta\theta$ est elle-même proportionnelle à cette diagonale.

250. Nous considérerons actuellement l'équilibre du polygone funiculaire qui a été le sujet des n°s 213 et suivants. En conservant les notations du n° 213, les équations de condition sont ici

$$f_0=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2},$$
$$f_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$
$$f_2=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2+(z_3-z_2)^2},$$
etc.
$$f_n=\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2+(z_{n+1}-z_n)^2}.$$

L'équation (A) du n° 243 devient :

$$0=$$
$$T_0\cos.a_0.\delta x_0+P_1\cos.\alpha_1\delta x_1+P_2\cos.\alpha_2.\delta x_2+\ldots+T_n\cos.a_n.\delta x_{n+1}$$
$$+T_0\cos.b_0.\delta y_0+P_1\cos.6_1\delta y_1+P_2\cos.6_2.\delta y_2+\ldots+T_n\cos.b_n.\delta y_{n+1}$$
$$+T_0\cos.c_0.\delta z_0+P_1\cos.\gamma_1\delta z_1+P_2\cos.\gamma_2\delta z_2+\ldots+T_n\cos.c_n.\delta z_{n+1}.$$

En différentiant les équations de condition précédentes et marquant les différentielles par le signe δ, elles donneront

$$0=\frac{(x_1-x_0)(\delta x_1-\delta x_0)+(y_1-y_0)(\delta y_1-\delta y_0)+(z_1-z_0)(\delta z_1-\delta z_0)}{f_0},$$
$$0=\frac{(x_2-x_1)(\delta x_2-\delta x_1)+(y_2-y_1)(\delta y_2-\delta y_1)+(z_2-z_1)(\delta z_2-\delta z_1)}{f_1},$$

$$0=\frac{(x_3-x_2)(\delta x_3-\delta x_2)+(y_3-y_2)(\delta y_3-\delta y_2)+(z_3-z_2)(\delta z_3-\delta z_2)}{f_2},$$

etc.,

$$0=\frac{(x_{n+1}-x_n)(\delta x_{n+1}-\delta x_n)+(y_{n+1}-y_n)(\delta y_{n+1}-\delta y_n)+(z_{n+1}-z_n)(\delta z_{n+1}-\delta z_n}{f_n}.$$

Par conséquent si, conformément à ce qui a été dit n° 244, on ajoute ces équations au second membre de l'équation précédente, après les avoir multipliées respectivement par des indéterminées $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; et si l'on égale ensuite séparément à zéro les termes qui se trouveront affectés des variations $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$; $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$; δx_2, etc., on obtiendra les équations suivantes, qui expriment les conditions de l'équilibre :

$$\text{Pour le point } m_0 \begin{cases} 0=T_0\cos.a_0-\lambda_0\dfrac{x_1-x_0}{f_0}, \\ 0=T_0\cos.b_0-\lambda_0\dfrac{y_1-y_0}{f_0}, \\ 0=T_0\cos.c_0-\lambda_0\dfrac{z_1-z_0}{f_0}. \end{cases}$$

$$\text{Pour le point } m_1 \begin{cases} 0=\lambda_0\dfrac{x_1-x_0}{f_0}+P_1\cos.\alpha_1-\lambda_1\dfrac{x_2-x_1}{f_1}, \\ 0=\lambda_0\dfrac{y_1-y_0}{f_0}+P_1\cos.\beta_1-\lambda_1\dfrac{y_2-y_1}{f_1}, \\ 0=\lambda_0\dfrac{z_1-z_0}{f_0}+P_1\cos.\gamma_1-\lambda_1\dfrac{z_2-z_1}{f_1}. \end{cases}$$

$$\text{Pour le point } m_2 \begin{cases} 0=\lambda_1\dfrac{x_2-x_1}{f_1}+P_2\cos.\alpha_2-\lambda_2\dfrac{x_3-x_2}{f_2}, \\ 0=\lambda_1\dfrac{y_2-y_1}{f_1}+P_2\cos.\beta_2-\lambda_2\dfrac{y_3-y_2}{f_2}, \\ 0=\lambda_1\dfrac{z_2-z_1}{f_1}+P_2\cos.\gamma_2-\lambda_2\dfrac{z_3-z_2}{f_2}, \end{cases}$$

etc.,

$$\text{Pour le point } m_n \begin{cases} 0 = \lambda_n \dfrac{x_{n+1} - x_n}{f_n} + T_n \cos.a_n \\ 0 = \lambda_n \dfrac{y_{n+1} - y_n}{f_n} + T_n \cos.b_n \\ 0 = \lambda_n \dfrac{z_{n+1} - z_n}{f_n} + T_n \cos.c_n \end{cases}$$

Ces résultats s'accordent évidemment avec ceux qui ont été donnés dans les n°s 213 et 214. Les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$, représentent, conformément à ce qu'on a vu n° 245, les tensions supportées par les divers côtés du polygone. La première et la dernière des équations précédentes indiquent que les forces appliquées aux points extrêmes doivent être dirigées dans le sens des côtés extrêmes et égales à la tension de ces côtés. Les autres équations indiquent que la force appliquée à chaque sommet du polygone doit être égale et directement opposée aux tensions des côtés contigus.

251. Nous emploierons enfin le principe des vitesses virtuelles à la recherche des équations de la courbe funiculaire dont on s'est occupé dans les n°s 218 et suivants ; et la solution de cette question pourra donner une idée de la manière dont la méthode des variations s'applique aux problèmes de mécanique.

En conservant ici les notations du n° 218, l'équation qui exprime l'égalité à zéro de la somme des moments virtuels de toutes les forces appliquées au fil est :

$$\begin{aligned} 0 = \\ & T_0 \cos.a_0 . \delta x_0 + T_0 \cos.b_0 . \delta y_0 + T_0 \cos.c_0 . \delta z_0 \\ & + T_\omega \cos.a_\omega . \delta x_\omega + T_\omega \cos.b_\omega . \delta y_\omega + T_\omega \cos.c_\omega . \delta z^\omega \\ & + \int_{s_0}^{s_\omega} ds (p \cos.\alpha . \delta x + p \cos.\beta . \delta y + p \cos.\gamma . \delta z). \end{aligned}$$

La seule condition à laquelle le système soit assujetti consiste en ce que la longueur des éléments ds du fil est invariable, en sorte que l'on doit poser pour chacun de ses éléments l'équation

$$ds = const. \quad \text{ou} \quad \delta.ds = 0.$$

Pour suivre donc la règle donnée n° 244, il faudrait multiplier chacune de ces équations par une indéterminée, et les ajouter toutes au second membre de l'équation précédente. Cela revient évidemment à ajouter à ce second membre l'intégrale $\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda.ds$, dans laquelle λ est regardée comme une quantité variable avec s, et pouvant prendre une valeur indéterminée. D'après cela l'équation exprimant les conditions de l'équilibre, et analogue à l'équation (C) du n° 244, sera :

$$\begin{aligned} 0 = \\ & T_0 \cos.a_0.\delta x_0 + T_0 \cos.b_0.\delta y_0 + T_0 \cos.c.\delta z \\ & + T_\omega \cos.a_\omega.\delta x_\omega + T_\omega \cos.b_\omega.\delta y_\omega + T_\omega \cos.c_\omega.\delta z_\omega \\ & + \int_{s_0}^{s_\omega} ds(p\cos.\alpha.\delta x + p\cos.\beta.\delta y + p\cos.\gamma.\delta z) + \int_{s_0}^{s_\omega} \lambda.\delta ds \end{aligned}$$

Cette équation doit subsister quelles que puissent être les valeurs attribuées aux variations des coordonnées des divers points de la courbe. Elle est tout à fait semblable aux équations auxquelles on est conduit pour la solution des questions de maxima ou minima des intégrales définies, et peut se traiter de la même manière. On remarquera donc que la relation

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

donne

$$\delta ds = \frac{dx.\delta dx + dy.\delta dy + dz.\delta dz}{ds};$$

et par conséquent

$$\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda.\delta ds = \int_{s_0}^{s_\omega} ds.\lambda \left[\frac{dx}{ds}\frac{\delta dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta dz}{ds}\right].$$

En changeant l'ordre des signes d et δ, et effectuant les intégrations par parties qui doivent faire disparaître les différentielles des variations, cette expression se transformera en

$$\int_{s_0}^{s_\omega} \lambda.\delta ds =$$

$$-\lambda_0 \left[\frac{dx_0}{ds_0}\delta x_0 + \frac{dy_0}{ds_0}\delta y_0 + \frac{dz_0}{ds_0}\delta z_0\right]$$

$$+\lambda_\omega \left[\frac{dx_\omega}{ds_\omega}\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{ds_\omega}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{ds_\omega}\delta z_\omega\right]$$

$$-\int_{s_0}^{s_\omega} ds \left[\frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right).\delta x + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right).\delta y + \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right).\delta z\right],$$

valeur qui doit être substituée dans l'équation précédente.

Si l'on fait cette substitution, et si l'on égale ensuite séparément à zéro les termes affectés des variations des coordonnées qui sont entièrement indépendantes, 1° il viendra, pour le premier et le dernier point de la courbe, les équations déterminées,

$$0 = T_0 \cos. a_0 - \lambda_0 \frac{dx_0}{ds_0},$$

$$0 = T_0 \cos. b_0 - \lambda_0 \frac{dy_0}{ds_0},$$

$$0 = T_0 \cos. c_0 - \lambda_0 \frac{dz_0}{ds_0};$$

$$0 = T_{\omega} \cos. a_{\omega} + \lambda_{\omega} \frac{dx_{\omega}}{ds_{\omega}},$$

$$0 = T_{\omega} \cos. b_{\omega} + \lambda_{\omega} \frac{dy_{\omega}}{ds_{\omega}},$$

$$0 = T_{\omega} \cos. c_{\omega} + \lambda_{\omega} \frac{dz_{\omega}}{ds_{\omega}};$$

d'où l'on conclut que les forces appliquées aux points extrêmes doivent être dirigées dans le sens des derniers éléments, égales et opposées à la tension que ces éléments supportent, tension qui est représentée dans toute l'étendue de la courbe par la valeur de la quantité λ.

2° On aura pour tous les points de la courbe, en égalant séparément à zéro les termes affectés de $\delta x, \delta y, \delta z$ qui sont restés sous le signe d'intégration, les équations indéfinies,

$$p \cos. \alpha - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dx}{ds}\right) = 0,$$

$$p \cos. \beta - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dy}{ds}\right) = 0,$$

$$p \cos. \gamma - \frac{d}{ds}\left(\lambda \frac{dz}{ds}\right) = 0.$$

Ces dernières équations s'accordent avec celles qui ont été données n° 220. En les intégrant on aura des équations qui s'accorderont avec celles du n° 218.

Remarque générale.

252. Pour reconnaître à quoi tient cette analogie entre les méthodes qui s'appliquent aux questions de maxima et minima, et celles qui sont propres à la re-

cherche des conditions de l'équilibre d'un système de forces, on remarquera que dans l'équation

$$S.P.\delta p=0, \quad \text{ou} \quad P_1\delta p_1+P_2.\delta p_2+P_3.\delta p_3+\text{etc.}=0,$$

qui exprime en général les conditions dont il s'agit, on peut dans la plupart des cas naturels regarder le premier membre comme étant la variation d'une certaine fonction Π des variables p_1, p_2, p_3, etc., en sorte qu'on aurait

$$\delta\Pi=P_1.\delta p_1+P_2.\delta p_2+P_3.\delta p_3+\text{etc.}$$

L'équation précédente exprime donc la condition du maximum de la fonction Π. Ainsi l'on ne peut résoudre une question d'équilibre sans résoudre en même temps une question de maximum ou minimum. On conçoit d'ailleurs que s'il existe certaines conditions auxquelles les variations $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3$, etc., soient assujetties, il conviendra d'y avoir égard. La manière dont cela doit se faire a été expliquée dans les n°s 512 et suivants des *Leçons d'analyse*, et on voit que les procédés indiqués dans ces numéros sont entièrement conformes à ceux qui ont été exposés ci-dessus.

253. Considérons le cas particulier où toutes les forces appliquées au système seraient verticales et constantes, c'est-à-dire le cas où le système serait formé d'un assemblage de corps pesants liés les uns aux autres d'une manière quelconque, sans qu'aucune force étrangère leur fût appliquée. Toutes les lignes p_1, p_2, p_3, sont alors parallèles; P_1, P_2, P_3, etc., sont constantes; et par conséquent,

$$\Pi=P_1p_1+P_2p_2+P_3p_3+\text{etc.}$$

Les lignes p_1, p_2, p_3, etc., peuvent être comptées à partir de points fixes quelconques pris dans les directions des forces. Si l'on suppose ces lignes comptées à partir d'un même plan horizontal quelconque, la quantité précédente divisée par la quantité constante, $P_1 + P_2 + P_3$, etc., c'est-à-dire la fonction

$$\frac{P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \text{etc.}}{P_1 + P_2 + P_3 + \text{etc.}},$$

représentera la distance du centre de gravité des corps du système au plan horizontal dont il s'agit. Les conditions nécessaires pour que le système soit en équilibre sont donc celles qui doivent avoir lieu pour que le centre de gravité des corps dont ce système est composé soit placé le plus haut et le plus bas possible. Nous exposerons dans la suite des considérations appartenant à la dynamique, qui sont nécessaires pour étendre et pour compléter ces notions.

XVII. Équation générale du mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces quelconques. — Principe de d'Alembert.

254. Les conditions générales du mouvement d'un point matériel soumis à l'action de diverses forces, ont été exposées dans l'article VIII, pour le cas où le point matériel était entièrement libre, et dans l'article IX, pour les cas où ce point était assujetti à se mouvoir sur une ligne courbe ou sur une surface courbe donnée. Il s'agit présentement d'établir les conditions générales du mouvement d'un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière quelconque. Nous con-

cevons toujours le système formé de la manière qui a été indiquée dans les nos 229 et 230, et nous le supposons sollicité par des forces dont l'action s'exerce d'une manière continue comme celle de la pesanteur.

La loi du mouvement d'un point matériel libre consiste en ce que la quantité de mouvement acquise par le corps dans l'unité de temps, et dans la direction de la force par laquelle ce corps est sollicité, est constamment égale à l'effort exercé sur le corps par cette force.

Si le point matériel est assujetti à se mouvoir dans une ligne ou dans une surface donnée, la recherche des conditions de son mouvement se ramène au cas d'un point matériel entièrement libre, conformément à ce qu'on a vu dans l'article VIII, en introduisant dans les équations générales qui expriment ces conditions la force qui représente l'effort exercé par lequel le point matériel est retenu dans la ligne ou dans la surface. Et l'on peut déduire de ces équations générales la connaissance du mouvement du point matériel et celle de l'effort dont il s'agit.

255. Considérons maintenant un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière quelconque, qui se meuvent, et auxquels sont appliquées des forces. La liaison établie entre ces points ne permet pas en général qu'ils cèdent librement à l'action des forces qui leur sont respectivement appliquées, et qu'on puisse déterminer leurs mouvements d'après les règles qui conviennent à un point matériel. Il s'établit évidemment entre tous les points, ou entre quelques-uns des points du système considérés deux à deux, des actions intérieures par l'effet desquelles leurs mouvements

sont modifiés. Le mouvement de l'un quelconque des points matériels considéré à part résulte, 1° de sa vitesse initiale; 2° de la force extérieure qui lui est appliquée; 3° des actions intérieures qui s'établissent entre ce point et les autres points du système, actions qui dépendent elles-mêmes de la nature des liaisons par lesquelles le système est constitué. Mais si l'on tient compte de ces efforts intérieurs, on pourra évidemment exprimer les conditions du mouvement de chacun des points du système de la même manière que si ces points étaient libres de se mouvoir indépendamment les uns des autres.

D'après cela, en représentant par :

m la masse de l'un quelconque des points matériels;

x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires du lieu où ce point se trouve situé au bout du temps t;

X, Y, Z, les efforts, exprimés en unités de poids, exercés sur le point m par les forces extérieures qui lui sont appliquées dans le sens des axes des x, des y, des z;

E, F, G, les efforts, également exprimés en unités de poids, exercés sur le même point parallèlement aux axes, et provenant des actions intérieures qui s'établissent entre le point m et les autres points du système;

on aura, conformément au n° 141, pour chacun des points du système, les équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+E,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+F,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+G.$$

Admettons maintenant que considérant le système dans l'état où il se trouve au bout du temps t, on lui imprime un mouvement quelconque infiniment petit, sans que les conditions de la liaison des points matériels soient violées, et par l'effet duquel le point m ait décrit respectivement dans le sens des x, des y et des z, les espaces $\delta x, \delta y, \delta z$. Multiplions la première des équations précédentes par δx, la seconde par δy, la troisième par δz, et ajoutons toutes les équations obtenues de cette manière. On obtiendra ainsi l'équation unique,

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

le signe S indiquant une somme formée des quantités qui suivent ce signe appartenant à tous les points du système. En effet la somme $S(E\delta x+F\delta y+G\delta z)$, des moments virtuels dus aux forces intérieures est nécessairement nulle d'après ce qui a été dit n° 239.

De plus, si le système n'est pas entièrement libre, et si quelques-uns de ses points sont assujettis à demeurer dans des surfaces ou des lignes fixes données, les résistances de ces surfaces ou de ces lignes introduiront de nouvelles forces, mais dont les moments virtuels seront toujours nuls, comme on l'a remarqué dans le n° 240. L'équation précédente subsistera donc encore dans ce cas.

256. Cette équation exprime les conditions générales du mouvement du système : en la réunissant aux équations de condition par lesquelles la nature de la liaison des points matériels est définie, on aura tout ce qui est nécessaire pour déterminer les mouvements de tous les points matériels. Les variations δx, δy, δz doivent satisfaire aux équations dont il s'agit, et ne sont assujetties à aucune autre condition. Elles représentent des espaces quelconques infiniment petits qui peuvent être décrits par les points du système, lorsqu'on lui fait subir un léger changement de figure à partir de celle qu'il affectait à la fin du temps t. Les espaces δx, δy, δz ne doivent pas en général être confondus avec les espaces représentés par dx, dy, dz qui sont effectivement parcourus par les points du système dans l'instant dt qui suit le temps t, par l'effet du mouvement actuel de ce système. Il serait possible que les conditions de la liaison des points matériels fussent telles que dx, dy, dz ne pussent pas être substitués dans l'équation précédente à la place de δx, δy, δz.

257. L'équation

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

à laquelle on vient de parvenir directement dans le n° 255, exprime à proprement parler que l'équilibre doit subsister dans le système proposé, d'une part entre les forces $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ que produiraient, si les points matériels leur cédaient librement le mouvement affecté véritablement par ces points, et d'autre

part entre les forces X, Y, Z appliquées extérieurement au système, ces dernières forces étant prises en sens contraire. On reconnaît effectivement que le mouvement du système doit être réglé de manière que la condition dont il s'agit soit constamment satisfaite.

Pour démontrer cette proposition, considérons en général l'une quelconque des forces appliquées extérieurement au système. Si le point matériel sur lequel agit cette force était libre, il prendrait le mouvement qu'elle tend à lui imprimer, conformément à la loi qui a été rappelée ci-dessus, n° 254; mais la liaison mutuelle des parties du système oblige en général le point dont il s'agit, à prendre un autre mouvement. Or on peut concevoir la force appliquée au point matériel décomposée en deux autres forces, dont l'une imprimerait à ce point, s'il était libre, le mouvement qu'il prend véritablement; et il est visible que cette première composante produit seule le mouvement du point, et que la seconde composante est détruite par l'effet des actions mutuelles qui s'établissent entre les parties du système. La première composante est la *force conservée*, et la seconde est la *force perdue* par le point matériel. Ainsi l'on voit que la nature des mouvements affectés par le système, consiste en ce que les forces perdues doivent se détruire réciproquement, ou se faire constamment équilibre en vertu de la liaison des points matériels. C'est en cela que consiste le principe établi par d'Alembert.

Les forces appliquées au système dans le sens des trois axes ayant été représentées ci-dessus par X, Y, Z, et les forces capables de produire les mouvements affectés par les points matériels suivant les mêmes directions,

c'est-à-dire les forces conservées, étant représentées par

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\ m\frac{d^2y}{dt^2},\ m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

les forces perdues sont exprimées par

$$X-m\frac{d^2x}{dt^2},\ Y-m\frac{d^2y}{dt^2},\ Z-m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

La condition de l'équilibre entre ces forces est donc donnée par l'équation.

$$S\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+S\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+S\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z=0,$$

qui revient à la précédente, et à laquelle on doit réunir les équations de condition appartenant au système. On voit d'ailleurs qu'établir l'équilibre entre les forces perdues, est la même chose qu'établir l'équilibre entre les forces conservées et les forces appliquées au système prise en sens contraires; puisque pour chaque point du système, la force perdue est égale et directement opposée à la résultante de la force conservée et de la foce appliquée au système prise en sens contraire.

258. En exposant les notions précédentes, nous regardions les forces appliquées au système comme agissant d'une manière continue, et imprimant aux divers points matériels des mouvements qui changent eux-mêmes d'une manière continue et progressive, en sorte que les vitesses ne varient en général que d'une quantité infiniment petite dans un intervalle de temps infiniment petit. Mais il est quelquefois nécessaire de considérer l'action de certaines forces qui, exerçant de très-grandes pressions dans un temps extrêmement court, font varier,

de quantités finies, les vitesses des parties du système, quoique la durée de ces actions soit sensiblement nulle. Dans les cas de ce genre on peut admettre que pendant la durée extrêmement petite des actions dont il s'agit, la position des points matériels du système n'a pas changé, d'où il suit que dans l'équation précédente

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

on peut regarder les quantités δx, δy, δz comme ne variant pas avec le temps. Si l'on multiplie par dt les deux membres de cette équation, et si l'on intègre depuis $t=0$ jusqu'à $t=t$, il viendra donc

$$S.m\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)\delta x+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)\delta y+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)\delta z\right]$$
$$=S(\delta x\int_0^t Xdt+\delta y\int_0^t Ydt+\delta z\int_0^t Zdt),$$

en représentant par $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, les vitesses, pour $t=0$, du point matériel dont la masse est m. Or, dans cette dernière équation, les quantités

$$m\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right),\ m\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right),\ m\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_0}{dt}\right)$$

sont les quantités de mouvement acquises par le point matériel dans le sens de chaque axe, et

$$\int_0^t Xdt,\ \int_0^t Ydt,\ \int_0^t Zdt$$

sont les quantités de mouvement qui lui ont été impri-

mées dans le même sens par les forces qui le sollicitent. Ainsi elle exprime que les quantités de mouvement acquises par les parties du système pendant la durée très-courte de l'action que nous considérons ici, doivent faire équilibre aux quantités de mouvement imprimées par les forces prises en sens contraire; c'est-à-dire, en d'autres termes, que le principe de d'Alembert subsiste dans les cas où il s'opère un changement brusque dans le mouvement du système aussi bien que dans ceux où ce mouvement ne varie que par degrés insensibles.

XVIII. Mouvement de deux points matériels pesants liés par un fil flexible.

259. Considérons deux points matériels dont les masses sont m, m', assujettis à se mouvoir sur deux plans inclinés formant avec la verticale des angles θ, θ', et liés l'un à l'autre par un fil parfaitement flexible qui passe sur une poulie fixe placée au sommet des deux plans. Soit g la vitesse imprimée aux corps pesants par la gravité dans l'unité de temps. On suppose que le système des deux points matériels a reçu une vitesse initiale quelconque, et qu'il est ensuite soumis à l'action de la gravité : il s'agit de rechercher la nature du mouvement qu'il affectera.

Cette question se résoudra, conformément à ce qui a été dit n° 257, en exprimant qu'il y a équilibre entre les forces auxquelles sont dus les mouvements des points matériels, et les forces agissant sur ces points prises en sens contraires; ou, ce qui revient au même, entre les forces perdues par les points matériels. Donc, nommant

v et v' les vitesses des points m, m' au bout du temps t, ces vitesses étant supposées positives quand les corps descendent, la condition dont il s'agit sera exprimée ici par l'équation

$$mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt} = m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt};$$

ou, comme $v' = -v$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m\cos.\theta - m'\cos.\theta'}{m+m'}g.$$

En intégrant l'on trouve

$$v = \frac{m\cos.\theta - m'\cos.\theta'}{m+m'}gt + V,$$

V étant la valeur initiale de la vitesse v du point m.

Le mouvement des points est uniformément accéléré ou retardé; il est dû à une force constante plus petite que l'action de la gravité dans le rapport exprimé par la fraction $\frac{m\cos.\theta - m'\cos\theta'}{m+m'}$.

La tension du fil est le résultat de la destruction mutuelle des forces égales

$$mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt},$$

qui a lieu par l'effet de la liaison que le fil établit entre les deux points matériels. La valeur de cette tension est donc constante, et exprimée par $\frac{mm'}{m+m'}(\cos.\theta + \cos.\theta')g$.

260. Si le plan sur lequel se meut le point m était vertical et le plan sur lequel se meut le point m' horizontal, la formule précédente deviendrait

$$v = \frac{m}{m+m'}gt + V.$$

Le mouvement est dû à l'action d'une force moindre que la gravité dans le rapport de la masse du corps descendant à la somme des masses des deux corps. La tension constante du fil est $\frac{mm'}{m+m'}g$.

261. Si les lignes décrites par les corps étaient toutes deux verticales, la formule dont il s'agit donnerait

$$v = \frac{m-m'}{m+m'}gt + V.$$

La tension du fil est $\frac{2mm'}{m+m'}g$. Cette expression s'applique à l'appareil connu sous le nom de machine d'Atwood, lorsqu'on fait abstraction des frottements et des masses du fil et de la poulie.

262. La question n'est pas plus difficile à résoudre dans le cas où les points matériels sont soutenus par des fils qui s'enroulent sur deux cercles de diamètre différent, montés sur un même axe fixe horizontal et parallèle à la ligne d'intersection des deux plans inclinés. Les forces perdues par les deux corps sont représentées, comme dans le n° 259, par

$$mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt} \quad \text{et} \quad m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv}{dt}.$$

Soient r et r' les rayons des cercles sur lesquels s'enroulent respectivement les deux fils. La condition de l'équilibre des forces perdues sera exprimée par l'équation

$$\left(mg\cos.\theta - m\frac{dv}{dt}\right)r = \left(m'g\cos.\theta' - m'\frac{dv'}{dt}\right)r' ;$$

ou, comme l'on a ici $v' = -\frac{r'v}{r}$,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mr^2.\cos.\theta - m'rr'.\cos.\theta'}{mr^2 + m'r'^2}\, g.$$

En intégrant il vient

$$v = \frac{mr^2.\cos.\theta - m'rr'.\cos.\theta'}{mr^2 + m'r'^2}\, gt + V,$$

V étant la vitesse initiale du corps m. Les tensions des fils qui soutiennent les points matériels m et m' sont respectivement

$$\frac{mm'(r'^2\cos.\theta + rr'\cos.\theta')}{mr^2 + m'r'^2}\, g \text{ et } \frac{mm'(rr'\cos.\theta + r^2\cos.\theta')}{mr^2 + m'r'^2}\, g.$$

263. Nous considérerons encore la question du n° 259 en admettant que l'on tienne compte d'un frottement exercé par chacun des corps sur les plans inclinés, la résistance due à ce frottement étant supposée proportionnelle à la pression exercée par le corps contre ce plan. Soit f le rapport du frottement à la pression pour le premier corps, f' le même rapport pour le second corps. L'équilibre des forces perdues sera exprimé, en supposant que le corps m descende, par l'équation

$$mg\cos.\theta - fmg\sin.\theta - m\frac{dv}{dt} = m'g\cos.\theta' + f'm'g\sin.\theta' - m'\frac{dv'}{dt};$$

d'où l'on déduira comme ci-dessus

$$\frac{dv}{dt} = \frac{m(\cos.\theta - f\sin.\theta) - m'(\cos.\theta' + f'\sin.\theta')}{m + m'}\, g,$$

et

$$v = \frac{m(\cos.\theta - f\sin.\theta) - m'(\cos.\theta' + f'\sin.\theta')}{m + m'}\, gt + V.$$

Le mouvement commun des deux corps est toujours uniformément accéléré ou retardé. La tension constante du fil est

$$\frac{mm'}{m+m'}(\cos.\theta - f\sin.\theta + \cos.\theta' + f'\sin.\theta')g.$$

264. Si le corps m descendait verticalement tandis que le corps m' décrirait une ligne horizontale, comme on l'a supposé n° 260, on aurait simplement

$$v = \frac{m - f'm'}{m+m'}gt + V;$$

et pour la tension du fil

$$\frac{mm'}{m+m'}(1+f')g.$$

Les résultats seraient différents si l'intensité du frottement était supposée dépendre de la vitesse du mouvement. Des expériences spéciales ayant constaté que dans le cas dont il s'agit, les mouvements des corps sont uniformément accélérés ou retardés, on doit en conclure que l'intensité du frottement est entièrement indépendante de la vitesse. Cette intensité est uniquement déterminée pour les divers corps par la grandeur de la pression exercée par l'un des corps sur l'autre.

Mouvement d'un fil parfaitement flexible et inextensible.

265. Pour donner un nouvel exemple de l'application des procédés du calcul des variations aux questions de mécanique, on considérera le mouvement d'un fil parfaitement flexible et inextensible. Nous désignerons

par m la masse de l'unité de longueur du fil, par s l'arc de la courbe du fil compté d'un point fixe pris sur cette courbe, et se terminant à l'un quelconque de ses points, et par s_0 et s_ω, les valeurs de l'arc s pour la première et la dernière extrémité du fil. x, y, z représenteront les coordonnées du point de l'espace où se trouve à la fin du temps t le point du fil qui est à l'extrémité de l'arc s. Comme la masse de l'élément du fil qui est à la suite de ce point est mds, les forces perdues par cet élément parallèlement aux trois axes seront respectivement

$$-mds\frac{d^2x}{dt^2},\ -mds\frac{d^2y}{dt^2},\ -mds\frac{d^2z}{dt^2},$$

puisqu'on n'admet pas qu'aucune force extérieure lui soit appliquée. Le fil doit être en équilibre en supposant chacun de ses éléments sollicité par les forces perdues, condition qui s'exprime, comme on l'a vu n° 251, par l'équation

$$0=\int_{s_0}^{s_\omega} mds\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right).$$

De plus il faut avoir égard à la condition de l'inextensibilité du fil, ce qu'on fera, conformément au n° 244, comme on l'a vu n° 251, en ajoutant au premier membre de l'équation précédente, l'intégrale $\int_{s_0}^{s_\omega}\lambda\delta ds$, λ désignant la tension supportée par l'élément ds de la longueur du fil. L'équation

$$0=\int_{s_0}^{s_\omega} mds\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)+\int_{s_0}^{s_\omega}\lambda\delta ds,$$

exprimera complétement les conditions du mouvement du système. Les quantités x, y, z doivent être regardées comme des fonctions de l'arc s et du temps t.

Comme l'on a

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz,$$

l'équation précédente revient à

$$0 = \int_{s_0}^{s_\omega} ds\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) + \lambda\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\frac{\delta dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\frac{\delta dz}{ds}\right)\right];$$

c'est-à-dire, en changeant dans le dernier terme l'ordre des signes d et δ, et appliquant le procédé de l'intégration par parties

$$0 = \int_{s_0}^{s_\omega} ds\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) - \frac{d.}{ds}\lambda\frac{dx}{ds}.\delta x - \frac{d.}{ds}\lambda\frac{dy}{ds}.\delta y - \frac{d.}{ds}\lambda\frac{dz}{ds}.\delta z\right]$$
$$-\lambda_0\left(\frac{dx_0}{ds_0}\delta x_0 + \frac{dy_0}{ds_0}\delta y_0 + \frac{dz_0}{ds_0}\delta z_0\right) + \lambda_\omega\left(\frac{dx_\omega}{ds_\omega}\delta x_\omega + \frac{dy_\omega}{ds_\omega}\delta y_\omega + \frac{dz_\omega}{ds_\omega}\delta z_\omega\right).$$

Égalant donc séparément à zéro les coefficients des variations δx, δy, δz, dans le terme affecté du signe d'intégration, on aura en premier lieu les trois équations indéfinies

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right),$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right),$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{ds}\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right),$$

qui doivent subsister pour un point quelconque du fil. Quant aux termes placés hors du signe d'intégration, et qui appartiennent aux extrémités du fil, ils disparaissent d'eux-mêmes si ces extrémités sont fixes, en sorte que les tensions λ_0 et λ_ω des éléments extrêmes peuvent alors avoir des valeurs quelconques. Si les extrémités du fil sont entièrement libres, ces termes ne peuvent disparaître qu'autant que l'on aura $\lambda_0 = 0$ et $\lambda_\omega = 0$, ce qui indique que ces tensions doivent alors avoir des valeurs nulles. Mais si, les extrémités du fil étant libres, il y a des forces particulières qui y soient appliquées, forces dont les moments virtuels devront entrer dans l'équation d'équilibre, il est visible que les tensions dont il s'agit devront être respectivement égales et opposées à la force appliquée à l'extrémité correspondante.

266. Nous supposerons que la première extrémité du fil soit fixe et placée dans l'axe des x, et que la seconde extrémité, sans être entièrement fixe, soit assujettie à demeurer dans le même axe. De plus nous admettrons que dans le mouvement du fil, les figures qu'il prend s'écartent très-peu de l'axe dans lequel ses deux extrémités sont placées, en sorte que l'on puisse remplacer sans erreur sensible ds par dx. L'équation exprimant l'égalité à zéro des termes relatifs aux extrémités du fil se réduira à

$$0 = \lambda_\omega \delta x_\omega ,$$

et l'on ne peut y satisfaire qu'en supposant $\lambda_\omega = 0$, ou en admettant qu'une certaine force T, dirigée dans le sens de l'axe des x, et dont le moment virtuel soit $T\delta x_\omega$ se trouve appliquée à la seconde extrémité du fil. Si l'on

adopte cette dernière hypothèse, l'équation précédente devient

$$0=\lambda_{\omega}\delta x_{\omega}+T\delta x_{\omega},$$

et se trouvera satisfaite en prenant $-\lambda_{\omega}=T$. De plus, par suite de la supposition que la courbe du fil s'écarte toujours très-peu de la ligne droite, on peut admettre que la tension λ conserve dans toute l'étendue du fil une valeur constante, égale à celle de la force T. Les équations indéfinies se réduiront alors à

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\lambda\frac{d^2y}{dx^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\lambda\frac{d^2z}{dx^2}.$$

La première indique que, par suite des hypothèses précédentes, les points du fil n'ont pas de mouvement sensible dans le sens de l'axe des x. Les deux dernières donneront séparément la loi des mouvements de ces points dans le sens des y et des z. (Voyez les n°s 494 et suivants des *Leçons d'Analyse*.) On voit que les parties d'un fil peuvent exécuter à la fois des oscillations très-petites dans deux directions différentes, et que ces oscillations ont lieu respectivement comme si elles existaient seules. Cette proposition s'applique en général aux mouvements très-petits d'un système quelconque de points matériels, et même à tous les effets naturels dont les lois peuvent être exprimées par des équations différentielles linéaires.

XIX. Choc de deux corps solides.

267. Considérons deux corps sphériques homogènes, ou plus généralement deux corps homogènes dont la figure est celle d'un solide de révolution. Admettons

que les axes de ces deux corps étant placés dans une même ligne droite, ils se meuvent dans le sens de cette ligne avec des vitesses différentes. Lorsque les deux corps viendront à se rencontrer, il y aura choc, c'est-à-dire que les corps exerceront, pendant un petit intervalle de temps, un effort l'un contre l'autre, et qu'ensuite, cet effort ayant cessé, ils continueront à se mouvoir suivant la même ligne, avec des vitesses différentes de celles qui avaient lieu à l'instant où le choc a commencé. Il s'agit de rechercher les circonstances de ce phénomène, et principalement de déterminer, d'après la connaissance des masses respectives des corps et de leurs vitesses initiales, les valeurs des vitesses finales qui ont lieu quand le choc est terminé.

Il est nécessaire, pour se former des idées exactes sur ce sujet, d'avoir égard à la propriété des corps solides désignée sous le nom d'*élasticité*, c'est-à-dire à la faculté qu'ils présentent de changer un peu de figure, lorsqu'un effort est exercé sur une partie de leur surface, de résister à ce changement, et de reprendre d'eux-mêmes, complétement ou en partie, quand l'effort a cessé, leur figure primitive. Lorsque deux corps viennent à se choquer, ils exercent l'un contre l'autre un effort dont l'intensité varie pendant la durée du choc, et par l'effet duquel la figure de leur surface subit près du point de contact une légère altération, que nous désignerons par le nom d'*impression*. La profondeur de l'impression est d'autant plus grande que l'effort exercé est plus grand, et il existe en général une relation entre l'effort exercé et la profondeur de l'impression produite, qui dépend de la figure et

de la constitution physique du corps. Cela posé, on nommera

m, m' les masses des deux corps;

V, V' les vitesses des centres de gravité des deux corps à l'instant où le choc commence (ces vitesses sont supposées dirigées dans le même sens, V étant plus grande que V');

v, v' les vitesses des centres de gravité des deux corps à la fin du temps t, compté à partir du commencement du choc;

x, x' les distances des points où sont placés les centres de gravité des deux corps à la fin du même temps, comptées à partir d'un point fixe sur la direction de leur mouvement;

i, i' les profondeurs des impressions faites dans les deux corps au même instant, qui sont toujours des quantités très-petites;

N la valeur de l'effort exercé à la fin du temps t, par chacun des corps contre l'autre.

Comme on ne suppose pas ici qu'aucune force extérieure agisse sur les corps, leurs mouvements ne sont altérés pendant le choc que par l'effet de leur action mutuelle. En tenant compte de cette action, on peut d'ailleurs, comme on l'a remarqué n° 255, exprimer les conditions du mouvement de chaque corps de la même manière que s'il était libre. Nous avons donc ici, en supposant (ce qui est permis), la masse entière de chaque corps concentrée dans son centre de gravité, les deux équations

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-N, \qquad m\frac{d^2x'}{dt^2}=N,$$

ou bien

$$m\frac{dv}{dt} = -N, \qquad m\frac{dv'}{dt} = N;$$

et en ajoutant celles-ci :

$$mdv + m'dv' = 0.$$

Cette dernière donne en intégrant,

$$mv + m'v' = const.,$$

d'où il suit que la somme des quantités de mouvement des deux corps conserve une valeur constante pendant toute la durée du choc. On a donc

$$mv + m'v' = mV + m'V'.$$

268. D'autre part, en multipliant respectivement les deux premières équations par dx et dx', et ajoutant, on obtient

$$m\frac{dx.d^2x}{dt^2} + m'\frac{dx'.d^2x'}{dt^2} = -N(dx - dx'),$$

ou bien, parce que $dx - dx' = di + di'$,

$$m\frac{dx.d^2x}{dt^2} + m'\frac{dx.d^2x'}{dt^2} = -N(di + di').$$

Cette dernière équation étant intégrée donnera

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + m'\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = -2\int N(di + di') + const.,$$

d'où l'on déduit, en déterminant la constante par la considération qu'à l'instant où le choc commence la valeur de l'intégrale $\int N(di + di')$ est nulle,

$$mv^2 + m'v'^2 - (mV^2 + m'V'^2) = -2\int N(di + di').$$

Le premier membre représente l'excès de la somme des forces vives des deux corps au bout du temps t sur la somme des forces vives qui avait lieu à l'instant où le choc a commencé, c'est-à-dire la force vive acquise par le système des deux corps au bout du temps t. L'intégrale du second membre est prise depuis le commencement du choc, où l'on a $i=0$ et $i'=0$, jusqu'aux valeurs de i et i' qui ont lieu à la fin du temps t. Elle représente, à proprement parler, la somme des quantités d'action dues à l'effort variable que les corps ont exercé l'un contre l'autre.

269. Les valeurs de v et v' déduites des équations qui viennent d'être obtenues dans les deux numéros précédents sont

$$v=\frac{mV+m'V'}{m+m'}\pm\frac{m'}{m+m'}\sqrt{(V-V')^2-\frac{m+m'}{mm'}.2\int N(di+di)},$$

$$v'=\frac{mV+m'V'}{m+m'}\mp\frac{m}{m+m'}\sqrt{(V-V')^2-\frac{m+m'}{mm'}.2\int N(di+di')}.$$

Ces formules feraient connaître les vitesses respectives des deux corps qui ont lieu au bout du temps t, si l'on pouvait déterminer la valeur de l'intégrale $\int N\,(di+di')$ qui répond à une valeur donnée de t. Cette détermination exigerait évidemment, 1° que l'on eût l'expression de l'effort N en fonction de i pour l'un des corps, et de i' pour l'autre; 2° que l'on connût les valeurs de i et i' qui répondent à une valeur donnée de t.

270. On remarquera d'ailleurs que l'on doit concevoir en général la durée du choc partagée en deux parties. Dans la première partie la vitesse v est $>v'$, mais l'excès de la première vitesse sur la seconde décroît progressi-

vement, et elles finissent par devenir égales. On doit prendre pendant tout cet intervalle les signes supérieurs dans les deux formules précédentes. A la fin de cette première partie de la durée du choc, les vitesses des deux corps étant égales, ils n'exercent aucune pression l'un contre l'autre, et les impressions sont alors le plus grandes qu'il est possible. On a dans cet instant, d'après les formules précédentes

$$v = v' = \frac{mV + m'V'}{m + m'},$$

pour la vitesse commune des deux corps; et l'on voit de plus que la valeur numérique totale de l'intégrale qui représente la somme des quantités d'action dues à l'effort exercé par l'un des corps contre l'autre est

$$\int N(di + di') = \frac{1}{2}\frac{mm'}{m+m'}(V - V')^2.$$

Dans la seconde partie du choc, la profondeur des impressions diminue par la tendance naturelle des corps à revenir à leur figure primitive. Une nouvelle force de répulsion s'établit entre eux, et altère leurs mouvements: la vitesse v devient alors $< v'$, et l'on doit prendre les signes inférieurs dans les formules précédentes. Le choc est fini lorsque, par l'effet de la différence des mouvements affectés par les deux corps, la distance de leurs centres de gravité a augmenté de la quantité dont les impressions i et i' ont diminué à partir du moment où elles avaient atteint leurs plus grandes valeurs.

271. Les notions précédentes ne suffisent pas en gé-

néral pour la détermination des vitesses finales de deux corps entre lesquels un choc a eu lieu. Il est absolument nécessaire de prendre en considération pour cette détermination, la constitution physique de chaque corps, c'est-à-dire la nature des forces intérieures qui le constituent, et par lesquelles il résiste aux changements de figure et tend à reprendre complétement ou en partie sa figure primitive, quand cette figure a subi quelque altération. Cependant il existe deux cas particuliers où la détermination dont il s'agit peut être effectuée, et qui doivent être distingués, parce qu'ils présentent des limites dont la considération est toujours utile dans les applications.

Le premier cas est celui où l'on suppose la nature des corps telle, que quand une impression y a été formée, elle se conserve, sans que les corps tendent à revenir à leur figure primitive. Il est visible qu'alors le choc est fini lorsque les impressions ont atteint leur maximum et que les vitesses des centres de gravité des deux corps sont devenues égales. La formule

$$v = v' = \frac{mV + m'V'}{m + m'}$$

exprime donc dans ce cas la vitesse commune avec laquelle les deux corps se meuvent après le choc, sans se séparer et sans exercer aucune pression l'un contre l'autre. Ce résultat convient aux corps que l'on regarde comme entièrement dépourvus d'élasticité.

272. Le second cas est celui où l'on supposerait au contraire les corps parfaitement élastiques, c'est-à-dire tels que les impressions qui y ont été formées tendent à

disparaître complétement, et que les mêmes valeurs de N correspondent toujours aux mêmes valeurs de i et i', pendant que la profondeur de l'impression est croissante et pendant qu'elle est décroissante. Si les corps présentent cette propriété, et si de plus il arrive que les impressions se trouvent détruites à la fin du choc, c'est-à-dire lorsque les corps se séparent et cessent d'agir l'un sur l'autre (circonstance qui n'a pas lieu en général, et qui dépend du rapport existant entre les masses des deux corps), on aura évidemment les valeurs des vitesses finales, en supposant nulle, dans les formules du n° 269, l'intégrale $\int(di+di')$. En effet, la valeur de la portion de cette intégrale correspondant à la première partie de la durée du choc, pendant laquelle l'impression est croissante, sera égale et de signe contraire à la valeur de la portion qui correspond à la deuxième partie de la durée du choc pendant laquelle l'impression est décroissante. Comme on doit d'ailleurs prendre le signe inférieur dans les formules du n° 269, les expressions des vitesses finales seront

$$v=\frac{(m-m')V+2m'V'}{m+m'}$$
$$v'=\frac{(m'-m)V'+2mV}{m+m'}.$$

On peut observer que si les masses des corps étaient égales entre elles, ces formules donneraient $v=V'$, $v'=V$: l'effet du choc consisterait alors à donner à chacun des corps la vitesse de l'autre.

273. Considérons le cas du n° 271, c'est-à-dire celui d'un choc entre corps non élastiques. La force vive du

système avant le choc est $mV^2+m'V'^2$: après le choc, cette force vive est $mv^2+m'v'^2$, c'est-à-dire, en employant la valeur commune de v et v' du n° cité, $\frac{(mV+m'V')^2}{m+m'}$. La différence des forces vives du système avant et après le choc, ou la *force vive perdue par l'effet du choc* est donc

$$\frac{mm'}{m+m'}(V-V')^2,$$

expression égale au double des quantités d'action produites par les forces intérieures qui ont été développées pendant le choc. Or, il est aisé de vérifier que l'expression dont il s'agit revient à

$$m(V-v)^2+m'(V'-v)^2.$$

Ainsi, la force vive perdue par l'effet d'un choc entre corps non élastiques est égale à la force vive qui serait due aux vitesses perdues respectivement par chaque corps par l'effet du choc. Cette proposition, qui sera généralisée dans la suite, est d'un grand usage dans plusieurs applications importantes.

274. Considérons maintenant le cas du n° 272, c'est-à-dire celui d'un choc entre corps parfaitement élastiques. En mettant les valeurs de v, v' données dans ce numéro dans l'expression $mv^2+m'v'^2$, on trouve

$$mV^2+m'V'^2,$$

d'où l'on conclut que la force vive du système reprend à la fin du choc sa valeur initiale, circonstance qui doit effectivement avoir lieu, parce qu'ici la valeur de l'intégrale qui représente les quantités d'action dues aux forces intérieures développées par le choc est nulle.

Ainsi un choc entre deux corps parfaitement élastiques ne donnerait lieu à aucune perte de force vive ; mais on ne doit pas oublier que les valeurs des vitesses finales données n° 272, et par conséquent le résultat précédent, ne pourraient être admis qu'autant que les conditions énoncées dans ce numéro se trouveraient satisfaites. Il serait donc nécessaire, non-seulement que les corps fussent parfaitement élastiques, mais encore que l'on fût assuré qu'à l'instant où le choc se termine, ils sont entièrement revenus à leur figure naturelle, ce qui ne peut avoir lieu que dans des cas très-particuliers.

Remarque.

275. La théorie du choc des corps est présentée souvent d'après d'autres notions. On considère en premier lieu des corps parfaitement durs, c'est-à-dire dont la figure ne peut subir aucun changement ; d'où résulte la conséquence qu'un choc doit changer instantanément les vitesses des deux corps, et donner à ces vitesses une valeur commune. Soit v cette vitesse commune, les quantités de mouvement perdues par chacun des corps, par l'effet du choc, seront donc respectivement $m(V-v)$, $m'(V'-v)$. Or, d'après ce qu'on a vu n° 244, ces quantités de mouvement doivent faire équilibre aux quantités de mouvement imprimées par les forces agissant sur chaque corps pendant le choc, prises en sens contraires. Mais ces dernières forces, qui sont égales et dirigées en sens opposés suivant la même ligne droite, se détruisent réciproquement. L'équilibre dont il s'agit s'exprimera donc en posant simplement

$$m(V-v)+m(V'-v)=0,$$

d'où l'on déduit

$$v = \frac{mV + m'V'}{m + m'},$$

résultat conforme à celui obtenu n° 273, pour le cas des corps entièrement dépourvus d'élasticité. Ainsi l'hypothèse purement mathématique de corps parfaitement durs répond véritablement à l'état des corps (s'il en existe) qui ne réagissent point contre les changements de figure, et qui conservent sans altération les impressions qu'on y a formées.

276. On considère en second lieu des corps parfaitement élastiques, en regardant l'élasticité comme une propriété d'après laquelle un corps ayant frappé un plan fixe, serait repoussé en sens contraire avec une vitesse égale à celle qu'il avait à l'instant du choc, ou, en général, reprendrait en sens contraire, après un choc, une vitesse relative égale à celle que le choc lui a fait perdre. D'après cela, les deux corps ayant perdu respectivement, par l'effet du choc, les vitesses $V - v$, $-(v - V')$, leurs vitesses doivent prendre, à la fin du choc, les valeurs respectives $v - (V - v)$, $v + (v - V')$; ou bien $2v - V$, $2v - V'$; c'est-à-dire, en mettant pour v la valeur précédente

$$v = \frac{(m - m')V + 2m'V'}{m - m'}, \quad v = \frac{(m - m')V' + 2mV}{m + m'},$$

expressions conformes à celles qui ont été données n° 272.

Les considérations qui ont été présentées dans les n°s 267 et suivants semblent plus conformes aux effets naturels, et plus propres à donner des idées justes sur

la nature du phénomène dont il s'agit, en mettant en évidence les restrictions que l'on doit apporter dans l'application des résultats précédents.

XX. Mouvement d'un corps solide assujetti a tourner autour d'un axe fixe.

277. Soit un corps solide considéré comme un système de points matériels liés entre eux d'une manière invariable. Supposons des forces quelconques appliquées à ces points, et admettons que le seul mouvement que le système puisse prendre soit un mouvement de rotation autour d'un axe fixe. Nous désignerons par

m la masse de l'un quelconque des points matériels;
x, y, z les trois coordonnées rectangulaires du lieu où ce point se trouve situé au bout du temps t;
X, Y, Z les trois composantes dans le sens des x, des y et des z de la force appliquée à ce point, cette force étant donnée en unités de poids.

Les conditions du mouvement du système consistent, conformément à ce qui a été dit n° 257, en ce que les forces perdues à un instant quelconque doivent se faire équilibre les unes aux autres. Les forces perdues dans le sens des x, des y et des z sont exprimées pour chacun des points matériels par

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2},\quad Y - m\frac{d^2y}{dt^2},\quad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Elles doivent se faire équilibre autour de l'axe fixe, que nous supposerons coïncider avec l'axe des x; et par con-

séquent les conditions dont il s'agit sont exprimées d'après le n° 64 par la seule équation

$$S\left[\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)z-\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y\right]=0,$$

ou bien

$$S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=S(Yz-Zy),$$

S désignant toujours la somme des quantités exprimées à la suite de ce signe, prise pour tous les corps du système.

A l'égard des forces perdues dirigées dans le sens des x, c'est-à-dire parallèlement à l'axe fixe, dont la somme est $S\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)$, comme on suppose ici que le corps solide ne peut pas se mouvoir dans le sens de cet axe, on doit les regarder comme étant détruites par la résistance des points d'appui. Le mouvement du corps dépend donc uniquement des forces Y, Z dirigées dans des plans perpendiculaires à l'axe fixe, et de la vitesse de rotation initiale autour de cet axe.

278. Dans l'équilibre des forces perdues qui s'établit autour de l'axe fixe, cet axe supporte, par la destruction mutuelle de ces forces, des efforts dirigés perpendiculairement à sa direction, qui consistent, conformément au n° 66, 1° dans un effort dirigé parallèlement à l'axe des y dont la valeur est

$$S\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

et dont le point d'application sur l'axe fixe est placé à une distance de l'origine des coordonnées égale à

$$\frac{S\left(Yx - mx\frac{d^2y}{dt^2}\right)}{S\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)};$$

2° dans un effort dirigé parallèlement à l'axe des z dont la valeur est

$$S\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

et dont le point d'application sur l'axe fixe est placé à une distance de l'origine des coordonnées égale à

$$\frac{S\left(Zx - mx\frac{d^2z}{dt^2}\right)}{S\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)}.$$

279. Les expressions précédentes peuvent être mises sous une autre forme. Soit v la vitesse angulaire du mouvement de rotation à la fin du temps t, c'est-à-dire la vitesse de rotation des points situés à l'unité de distance de l'axe fixe; et r la distance des points dont les coordonnées sont y, z à ce même axe; on aura

$$\frac{dy}{dt} = vr.\frac{z}{r} = vz, \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dt} = -vr.\frac{y}{r} = -vy.$$

L'équation du n° 277, qui exprime la nature du mouvement, devient donc

$$\frac{dv}{dt}.S.mr^2 = S(Yz - Zy);$$

ou, en appelant P la résultante des deux forces Y et Z, et p la distance de la direction de cette résultante à l'axe fixe,

$$\frac{dv}{dt}.S.mr^2=S.Pp; \quad \text{d'où} \quad \frac{dv}{dt}=\frac{S.Pp}{S.mr^2}.$$

Cette équation exprime comment la vitesse angulaire varie avec le temps. Elle est analogue à l'équation $\frac{dv}{dt}=\frac{P}{m}$ qui convient à un mouvement rectiligne, v désignant la vitesse absolue. La quantité $S.mr^2$, c'est-à-dire la somme des produits des masses des points matériels par les quarrés de leur distance à l'axe fixe, dont la considération est importante, a été nommée d'après Euler *moment d'inertie*. Le moment d'inertie d'un corps, pris par rapport à une ligne quelconque donnée, offre une sorte de mesure de l'énergie du mouvement de rotation dont ce corps serait animé s'il tournait autour de cette ligne devenue un axe fixe. Toutes choses égales d'ailleurs, l'effort qu'il faudrait employer pour imprimer au corps un tel mouvement, ou pour détruire ce mouvement si le corps en était animé, serait proportionnel à son moment d'inertie.

280. En appliquant les mêmes transformations aux formules du n° 278, on trouvera pour les valeurs respectives des efforts exercés sur l'axe fixe dans le sens des y et dans le sens des z,

$$S\left(Y-mz\frac{dv}{dt}+my.v^2\right); \quad S\left(Z+my\frac{dv}{dt}.+mz.v^2\right);$$

et pour les distances respectives des points d'application de ces efforts à l'origine des coordonnées

$$\frac{S\left(Yx-mxz\frac{dv}{dt}+mxy.v^2\right)}{S\left(Y-mz\frac{dv}{dt}+my.v^2\right)}, \quad \frac{S\left(Zx+mxy\frac{dv}{dt}+mxz.v^2\right)}{S\left(Z+my\frac{dv}{dt}+mz.v^2\right)}.$$

281. Si aucune force n'était appliquée au système, l'équation du n° 279 se réduirait à

$$\frac{dv}{dt}=0, \quad \text{d'où} \quad v=V,$$

V désignant la vitesse angulaire initiale. Le corps aurait un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe fixe. Il n'y aurait alors aucun effort exercé sur cet axe par l'effet des variations du mouvement. Les efforts qu'il supporterait se réduiraient aux parties $S.my.v^2$, $S.mz.v^2$ qui sont uniquement dues à l'effet de la force centrifuge provenant du mouvement de rotation du corps.

282. Les pressions exercées sur l'axe fixe par l'effet de la force centrifuge dont toutes les parties matérielles du système sont animées peuvent être déterminées directement de la manière suivante. Pour chacun des points matériels, cette force, conformément au n° 148, produit l'effort $m\frac{v^2r^2}{r}$, ou mv^2r, dirigé dans le sens du rayon r, et équivalant aux efforts mv^2y dirigé dans le sens des y, et mv^2z dirigé dans le sens des z. Ainsi, par l'effet de la force centrifuge, l'axe fixe est sollicité respectivement dans le sens des y et dans le sens des z par les forces

$$v^2.S.my \quad \text{et} \quad v^2.S.mz;$$

et les points d'application de ces forces sur ce même axe sont situés à des distances de l'origine des coordonnées exprimées respectivement par

$$\frac{S.mxy}{S.my} \quad \text{et} \quad \frac{S.mxz}{S.mz}.$$

Les efforts dont il s'agit tendent à déplacer l'axe de rotation, et cet axe se déplacerait effectivement s'il n'était pas maintenu dans sa position.

283. Examinons dans quels cas particuliers les forces centrifuges des parties du système n'exerceraient aucune action sur l'axe fixe de rotation. Il serait nécessaire pour cela, 1°, que l'on eût

$$S.my=0 \quad \text{et} \quad S.mz=0,$$

afin que les sommes des efforts exercés parallèlement aux axes des y et des z fussent nulles; 2°, que l'on eût

$$S.mxy=0 \quad \text{et} \quad S.mxz=0,$$

afin que les moments de ces efforts fussent également nuls. La première condition sera toujours satisfaite si l'axe fixe passe par le centre de gravité du corps. Quant à la seconde condition, on verra plus loin que l'on peut y satisfaire toujours en déterminant convenablement la direction de l'axe fixe, par rapport aux parties du système.

Une droite passant par le centre de gravité d'un corps solide, à l'égard de laquelle les conditions $S.mxy=0$, $S.mxz=0$ subsistent, présente donc une propriété remarquable qui consiste en ce que le corps étant libre, et aucune force extérieure ne lui étant appliquée, si ce corps a commencé à tourner autour de la ligne dont il s'agit, il conservera indéfiniment le même mouvement de rotation, sans que l'axe subisse aucun déplacement. Cette circonstance s'exprime en disant qu'une telle ligne est un *axe naturel* ou un *axe permanent de rotation*.

284. Lorsque l'axe fixe ne passe point au centre de gravité, on n'a pas $S.my=0$, $S.mz=0$, et par conséquent les deux efforts exercés sur cet axe ne peuvent être nuls ni se réduire à des couples. Mais si l'on avait

$$\frac{S.mxy}{S.my}=\frac{S.mxz}{S.mz},$$

ces deux efforts se trouvant appliqués au même point de l'axe pourraient être composés en un seul, et en rendant fixe ce point d'application l'effort résultant serait détruit. Donc la condition de l'égalité des deux quantités

$$\frac{S.mxy}{S.my} \quad \text{et} \quad \frac{S.mxz}{S.mz},$$

donne à un axe la propriété qu'il suffit de rendre fixe un de ses points pour qu'il devienne un axe naturel de rotation.

On démontre d'ailleurs qu'on peut toujours faire passer par un point quelconque, pris dans l'intérieur ou à l'extérieur d'un corps solide, trois droites qui se croisent à angles droits, telles qu'en les prenant respectivement pour axes des x, des y et des z, on a les trois relations

$$S.mxy=0,\ S.mxz=0,\ S.myz=0.$$

Il existe donc toujours trois axes permanents de rotation perpendiculaires entre eux, passant par le centre de gravité d'un corps solide ; et il existe également toujours, pour un point quelconque de ce corps, trois droites qui se croisent à angles droits, et qui deviendront des axes permanents de rotation, si ce point est rendu fixe. La considération de ces lignes est essentielle dans la

théorie du mouvement des corps; on les a nommées avec Euler *axes principaux de rotation*, ou simplement *axes principaux*.

Détermination des axes principaux.

285. Considérons, comme ci-dessus, un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable et formant un corps solide; désignons par m la masse de l'un quelconque de ces points, et par x, y, z, ses coordonnées comptées sur trois axes rectangulaires. Soit une droite quelconque menée par l'origine des coordonnées, et formant les angles $\alpha, 6, \gamma$, avec les axes des x, des y et des z. La distance du point m à cette ligne est exprimée par

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2-(x\cos.\alpha+y\cos.6+z\cos.\gamma)^2}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par L le moment d'inertie du système pris relativement à la droite dont il s'agit, on aura

$$L=S.m[x^2+y^2+z^2-(x\cos.\alpha+y\cos.6+z\cos.\gamma)^2],$$

ou, si l'on veut,

$$L=S.m[x^2\sin.^2\alpha+y^2\sin.^2 6+z^2\sin.^2\gamma$$
$$-2xy\cos.\alpha\cos.6-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.6\cos.\gamma],$$

ou bien encore

$$L=S.m[(y^2+z^2)\cos.^2\alpha+(x^2+z^2)\cos.^2 6+(x^2+y^2)\cos.^2\gamma$$
$$-2xy\cos.\alpha\cos.6-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.6\cos.\gamma].$$

Enfin, en posant

$$A=S.m(y^2+z^2),\quad \text{et}\quad F=S.myz,$$
$$B=S.m(x^2+z^2),\quad G=S.mxz,$$
$$C=S.m(x^2+y^2),\quad H=S.mxy,$$

cette dernière expression deviendra

$$L = A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma - 2F\cos.\beta\cos.\gamma - 2G\cos.\alpha\cos.\gamma - 2H\cos.\alpha\cos.\beta \ldots\ldots \quad (p)$$

Les quantités A,B,C, représentent respectivement les moments d'inertie du système pris par rapport aux axes des x, des y et des z. La formule précédente donne d'une manière générale le moment d'inertie d'un corps solide pris par rapport à un axe quelconque passant par l'origine des coordonnées. La direction des axes des coordonnées, par rapport aux parties du corps, est entièrement arbitraire.

Remarquons d'ailleurs que si l'on désigne par a,b,c, les coordonnées d'un point quelconque de l'axe par rapport auquel le moment d'inertie L est pris, l'équation précédente pourra s'écrire

$$L(a^2+b^2+c^2) = Aa^2+Bb^2+Cc^2-2Fbc-2Gac-2Hab,$$

et se réduire à

$$1 = Aa^2+Bb^2+Cc^2-2Fbc-2Gac-2Hab\ ,$$

en prenant $\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{\sqrt{L}}$. Si l'on attribue donc à cet axe toutes les directions possibles, et si l'on porte sur chacune, à partir de l'origine des coordonnées, une longueur égale à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie correspondant, les points obtenus de cette manière appartiendront à un ellipsoïde représenté par l'équation précédente.

286. Cela posé, proposons-nous de déterminer les directions de la ligne par rapport à laquelle doit être

pris le moment d'inertie L, pour que ce moment d'inertie soit un maximum ou un minimum; ou, ce qui revient au même, de déterminer les directions des axes rectangulaires de l'ellipsoïde dont nous venons de parler. On connaîtra ces directions par ce caractère que la valeur de L ne variera pas quand on fera varier infiniment peu dans l'équation (p) les valeurs des angles α, β, γ. Si l'on met donc cette équation sous la forme

$$L(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)=A\cos.^2\alpha+B\cos.^2\beta+C\cos.^2\gamma$$
$$-2F\cos.\beta\cos.\gamma-2G\cos.\alpha\cos.\gamma-2H\cos.\alpha\cos.\beta,$$

et si on la différentie successivement par rapport à α, β, γ, en y regardant L comme constante, on obtiendra trois équations,

$$(L-A)\cos.\alpha+H\cos.\beta+G\cos.\gamma=0,$$
$$H\cos.\alpha+(L-B)\cos.\beta+F\cos.\gamma=0,$$
$$G\cos.\alpha+F\cos.\beta+(L-C)\cos.\gamma=0,$$

auxquelles doivent satisfaire les valeurs de α, β, γ et L qui répondent au maximum ou au minimum de cette dernière quantité. On en déduit en premier lieu l'équation du troisième degré

$$(L-A)(L-B)(L-C)-(L-A)F^2-(L-B)G^2-(L-C)H^2$$
$$+2FGH=0, \ldots\ldots\ldots \quad (q)$$

qui donnera la valeur de L, et dont les trois racines seront nécessairement réelles; puis

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\cos.\alpha}{\sqrt{(L-B)(L-C)-F^2}}=\frac{\cos.\beta}{\sqrt{(L-A)(L-C)-G^2}}=\frac{\cos.\gamma}{\sqrt{(L-A)(L-B)-H^2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{(L-B)(L-C)-F^2+(L-A)(L-C)-G^2+(L-A)(L-B)-H^2}},\end{aligned}\right\}\ldots(r)$$

pour déterminer la valeur des angles α, β, γ appartenant

aux trois lignes qui se croisent à angles droits, et auxquelles répondent les trois valeurs de L données par l'équation (q). On est assuré d'ailleurs, par ce qui précède, que la plus grande de ces trois valeurs sera un maximum, la plus petite un minimum, et que la valeur intermédiaire ne sera ni un maximum, ni un minimum, quoique satisfaisant à la condition de rendre nulle la différentielle du premier ordre de la fonction L.

Mais on peut concevoir que les trois lignes dont il s'agit coïncident avec les axes des x, des y et des z, et si cette circonstance avait lieu, les trois racines de l'équation (q) seraient alors respectivement égales à A, B et C; ce qui ne pourrait arriver qu'autant que l'on aurait $F=0$, $G=0$, et $H=0$. Donc, si les trois équations

$$S.myz=0, \quad S.mxz=0, \quad S.mxy=0,$$

subsistent, on en conclura que les axes des coordonnées coïncident avec les directions des lignes par rapport auxquelles le moment d'inertie est un maximum ou un minimum; et comme cette coïncidence est toujours possible, il s'ensuit qu'on peut toujours donner aux axes des coordonnées une direction telle que ces trois équations soient satisfaites.

Nous avons d'ailleurs nommé, dans le n° 284, *axes principaux*, trois lignes qui se croisent à angles droits dans un point quelconque d'un corps solide, et telles qu'étant prises pour axes des coordonnées, les trois équations précédentes sont satisfaites. On voit donc, par ce qui précède, que les axes principaux ne sont autre chose que les trois axes rectangulaires qui ont été déterminés

ci-dessus, dont les directions sont données par les équations (q) et (r), et à deux desquels répondent le plus grand et le plus petit de tous les moments d'inertie relatifs à toutes les droites qui se croisent au point pris pour origine des coordonnées.

Propriétés des axes principaux relatives aux moments d'inertie.

287. Admettons que l'on ait pris pour axe des coordonnées x, y, z, les axes principaux du corps solide que l'on considère, qui se croisent à l'origine des coordonnées. On aura donc, dans la formule (p) du n° 285, $F=0$, $G=0$, $H=0$, et A, B, C seront les trois moments d'inertie du corps relatifs à ces axes principaux. La formule (p) se réduira alors à

$$L = A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma\,;$$

en sorte que le moment d'inertie relatif à une droite quelconque passant par l'origine des coordonnées se trouve exprimé d'une manière fort simple au moyen des trois moments d'inertie relatifs aux axes principaux qui se croisent à cette origine, et des angles formés avec ces axes par la droite dont il s'agit. Les trois axes rectangulaires de l'ellipsoïde dont il a été question n° 285, et dont les rayons ont des longueurs réciproques aux racines carrées des moments d'inertie relatifs à ces rayons, coïncident avec les axes des coordonnées. L'équation de la surface de cet ellipsoïde se réduit à

$$1 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2.$$

288. Admettons maintenant qu'au lieu de prendre le

moment d'inertie par rapport à une droite passant par l'origine des coordonnées, on veuille le prendre par rapport à une droite passant par un point dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1; on devra remplacer alors x, y, z, par $x-x_1$, $y-y_1$, $z-z_1$, dans les formules du n° 285, de sorte qu'en désignant toujours par α, β, γ les angles formés par la ligne dont il s'agit avec les axes des coordonnées, le moment cherché sera

$$S.m\left[\begin{array}{c}(x-x_1)^2\sin.^2\alpha+(y-y_1)^2\sin.^2\beta+(z-z_1)^2\sin.^2\gamma \\ -2(x-x_1)(y-y_1)\cos.\alpha\cos.\beta-2(x-x_1)(z-z_1)\cos.\alpha\cos.\gamma \\ -2(y-y_1)(z-z_1)\cos.\beta\cos.\gamma\end{array}\right].$$

Mais si l'origine des coordonnées x, y, z était placée au centre de gravité du corps, on aurait alors $S.mx=0$, $S.my=0$, $S.mz=0$; et en vertu de ces relations, l'équation précédente deviendrait

$$S.m\left[\begin{array}{c}x^2\sin.^2\alpha+y^2\sin.^2\beta+z^2\sin.^2\gamma \\ -2xy\cos.\alpha\cos.\beta-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.\beta\cos.\gamma \\ +x_1^2\sin.^2\alpha+y_1^2\sin.^2\beta+z_1^2\sin.^2\gamma \\ -2x_1y_1\cos.\alpha\cos.\beta-2x_1z_1\cos.\alpha\cos.\gamma-2y_1z_1\cos.\beta\cos.\gamma\end{array}\right],$$

c'est-à-dire

$$S.m\left[\begin{array}{c}x^2\sin.^2\alpha+y^2\sin.^2\beta+z^2\sin.^2\gamma \\ -2xy\cos.\alpha\cos.\beta-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.\beta\cos.\gamma \\ +x_1^2+y_1^2+z_1^2-(x_1\cos.\alpha+y_1\cos.\beta+z_1\cos.\gamma)^2\end{array}\right].$$

La première partie de cette formule donne la valeur du moment d'inertie du corps pris par rapport à un axe mené parallèlement à la droite proposée par l'origine des coordonnées, origine que nous supposons placée au centre de gravité de ce corps. La seconde partie donne le produit de la masse entière du corps par le carré de la

distance de la ligne proposée à l'origine des coordonnées. On conclut donc de ce résultat que, connaissant le moment d'inertie pris par rapport à une droite quelconque passant par le centre de gravité du système, on aura le moment d'inertie pour toute autre ligne parallèle à celle-ci, en ajoutant au premier moment le produit de la masse du corps par le carré de la distance des deux droites.

289. D'après la formule du n° 287, le moment d'inertie pris par rapport à une ligne quelconque passant par le centre de gravité est exprimé par

$$A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma,$$

A, B, C représentant les moments d'inertie pris par rapport aux trois axes principaux qui se croisent en ce point, et α, β, γ les angles formés par la ligne dont il s'agit avec ces axes. Le moment d'inertie pris par rapport à une droite quelconque parallèle à celle-ci sera donc, d'après le n° 288, exprimé par

$$A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma + Md^2,$$

M désignant la masse totale du corps, et d la distance de ces deux droites; en sorte que connaissant seulement les valeurs des trois moments d'inertie relatifs aux trois axes qui se croisent au centre de gravité d'un corps, on détermine facilement le moment d'inertie relatif à toute autre ligne.

290. Si dans l'expression

$$L = A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma$$

du n° 287, on suppose A=B, elle se réduit à

$$L = A\sin.^2\gamma + C\cos.^2\gamma;$$

d'où l'on conclut que les moments d'inertie relatifs à deux des axes principaux étant égaux entre eux, les moments d'inertie pris par rapport à toutes les lignes formant un même angle avec le troisième axe sont aussi égaux entre eux.

291. Si l'on suppose A=B=C, la même expression se réduit à L=A. Ainsi les moments d'inertie relatifs aux trois axes principaux qui se croisent en un point quelconque d'un corps étant égaux entre eux, tous les moments d'inertie relatifs à une droite quelconque passant par le même point sont aussi égaux entre eux. Il est aisé de reconnaître d'ailleurs que si les moments d'inertie sont ainsi égaux pour toutes les lignes menées par un point donné, toutes ces lignes seront des axes principaux. En effet on a trouvé n° 285 pour l'expression générale du moment d'inertie pris par rapport à une droite quelconque,

$$L=S.m[(y^2+z^2)\cos.^2\alpha+(x^2+z^2)\cos.^2\beta+(x^2+y^2)\cos.^2\gamma$$
$$-2xy\cos.\alpha\cos.\beta-2xz\cos.\alpha\cos.\gamma-2yz\cos.\beta\cos.\gamma];$$

et comme les moments d'inertie relatifs aux trois axes sont égaux à A, on a ici

$$L=A-2S.m(xy\cos.\alpha\cos.\beta+xz\cos.\alpha\cos\gamma+yz\cos.\beta\cos.\gamma).$$

Or cette expression doit se réduire à A, quels que soient les angles α,β,γ; donc on doit avoir les équations

$$S.mxy=0,\ Smxz=0,\ Smyz=0;$$

qui caractérisent les axes principaux.

292. Examinons quels sont les points de l'espace

pour lesquels les axes principaux du corps solide qui appartiennent à ces points ont des directions parallèles entre elles. Les coordonnées x, y, z, étant comptées sur trois axes rectangulaires quelconques passant par le centre de gravité du corps solide, désignons par x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point donné m_1 comptées sur les mêmes axes.

Les trois équations

$$S.m(x-x_1)(y-y_1)=0, \qquad S.m(x-x_1)(z-z_1)=0,$$
$$S.m(y-y_1)(z-z_1)=0,$$

exprimeront la condition que les trois droites parallèles aux axes des x, des y et des z, qui passent par le point m_1 soient les trois axes principaux appartenant à ce point. Or, l'origine des coordonnées x, y, z étant placée au centre de gravité du corps, on a $S.mx=0$, $S.my=0$, $S.mz=0$, et les équations précédentes se réduisent à

$$S.mxy+Mx_1y_1=0, \quad S.mxz+Mx_1z_1=0, \quad S.myz+My_1z_1=0,$$

M représentant la masse entière du corps. On voit qu'il est en général impossible de satisfaire à ces équations par des valeurs différentes de x_1, y_1, z_1, si ce n'est par les valeurs $-x_1, -y_1, -z_1$. D'où l'on conclut qu'il n'existe en général qu'un seul point m dont les trois axes principaux soient parallèles à ceux qui appartiennent au point m_1, et que ce point m est situé de manière que la ligne mm_1 est partagée en deux parties égales par le centre de gravité du corps solide.

293. Admettons que l'axe des z coïncide avec l'un des axes principaux du corps qui appartiennent à son

centre de gravité, et par conséquent que le plan des xy coïncide avec le plan qui contient les deux autres axes principaux appartenant à ce centre. Changeons les coordonnées x,y,z en d'autres coordonnées a,b,c comptées sur les axes principaux dont on vient de parler. En nommant θ l'angle compris entre l'axe des a et celui des x; il viendra

$$x = a\cos.\theta + b\sin.\theta\,,\quad y = b\cos.\theta - a\sin.\theta\,,\quad z = c\,;$$

en substituant ces valeurs dans les trois équations précédentes, et observant que $S.mab=0$, $S.mac=0$, $S.mbc=0$, on aura

$$S.m(b^2-a^2)\tang.2\theta + M(b_1^2-a_1^2)\tang.2\theta + Ma_1b_1 = 0,$$
$$M(a_1\cos.\theta + b_1\sin.\theta)c_1 = 0,\qquad M(b_1\cos.\theta - a_1\sin.\theta)c_1 = 0.$$

Supposons actuellement que le point m_1, dont les coordonnées sont a_1,b_1,c_1, soit situé dans le plan des ab. Les deux dernières équations seront satisfaites, à cause de $c_1=0$, et la première restera seule pour exprimer la relation qui doit subsister entre les coordonnées a_1 et b_1, afin que les trois axes principaux, appartenant aux points déterminés par ces coordonnées aient des directions parallèles entre elles. Il est clair que deux de ces axes sont situés dans le plan des ab, l'un d'entre eux formant l'angle θ avec l'axe des a. Le troisième est perpendiculaire à ce plan, ou parallèle à l'axe principal appartenant au centre de gravité du corps qui coïncide avec l'axe des c,

L'équation précédente entre a_1 et b_1 appartient à une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes des x et des y; et l'on a :

$$\mp\sqrt{\frac{Sm(b^2-a^2)}{M}},\quad \pm\sqrt{\frac{Sm(a^2-b^2)}{M}},$$

pour les coordonnées des points où cette courbe coupe les axes des a_1 ou des b_1. L'une de ces expressions est toujours réelle, et l'autre toujours imaginaire; elles sont indépendantes de l'angle θ.

Il résulte de ce qui précède que, C (fig. 31) étant le centre de gravité du corps solide, et Ca, Cb deux des axes principaux appartenant à ce centre, le moment d'inertie relatif à l'axe Ca étant supposé plus grand que le moment d'inertie relatif à l'axe Cb; si l'on a dans le plan de ces deux axes un point quelconque m, que l'on détermine les deux axes principaux mp, mq appartenant à ce point qui seront contenus dans le même plan; que l'on mène par le centre C les droites Cx, Cy parallèles à mp, mq, et qu'enfin l'on construise l'hyperbole équilatère passant par le point m, dont ces lignes sont les asymptotes, tous les points situés sur cette hyperbole auront leur trois axes principaux parallèles à ceux qui appartiennent au point m. De plus, toutes les hyperboles ainsi construites couperont l'axe Ca en deux points D, D', situés à une distance du centre C, exprimée par $\sqrt{\frac{A-B}{M}}$, A et B désignant les moments d'inertie relatifs aux axes Ca et Cb. Si ces deux moments d'inertie étaient égaux, l'hyperbole équilatère se réduirait au système de deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre, dont l'une serait tracée du point m au centre C, et qui détermineraient les directions des axes principaux appartenant au point m.

294. Admettons maintenant que les trois axes des x, des y et des z du n° 292 coïncident avec les trois axes principaux appartenant au centre de gravité du corps, et supposons que le point m soit pris sur l'un de ces axes. On aura alors $S.mxy=0$, $S.mxz=0$, $S.myz=0$, et deux des coordonnées x_1, y_1, z_1 seront nulles. Les trois équations posées dans ce n° pour exprimer la condition que les axes des x, des y et des z soient parallèles aux axes principaux, appartenant au point m, se trouveront donc satisfaites. D'où l'on conclut que pour tous les points situés sur les axes principaux qui se croisent au centre de gravité d'un corps, les axes principaux sont parallèles aux premiers.

295. On peut demander d'ailleurs de déterminer les points d'un corps, s'il en existe, pour lesquels toutes les droites qui se croisent en ces points soient des axes principaux, et pour lesquels, par conséquent, les moments d'inertie pris par rapport à ces lignes soient égaux entre eux. Admettons que les axes des coordonnées x, y, z coïncident avec les axes principaux du corps qui se croisent en son centre de gravité : on aura les conditions

$$S.mx=0, \quad S.my=0, \quad S.mz=0,$$
$$S.mxy=0, \quad S.mxz=0, \quad S.myz=0;$$

et de plus en appelant A, B, C les trois moments d'inertie pris par rapport aux axes principaux qui se croisent au centre de gravité,

$$A=S.m(y^2+z^2), \quad B=S.m(x^2+z^2), \quad C=S.m(x^2+y^2).$$

Cela posé, si les parallèles menées aux axes primitifs

par le point qui a pour coordonnées x, y', z' sont des axes principaux, on aura

$$Sm(x-x')(y-y')=0, \qquad Sm(x-x')(z-z')=0,$$
$$Sm(y-y')(z-z')=0.$$

Ces équations se réduisent, en vertu des conditions précédentes, à

$$x'y'=0, \quad x'z'=0, \quad y'z'=0.$$

Celles-ci ne peuvent être satisfaites à moins que deux des quantités x', y', z' ne soient nulles; d'où l'on conclut en premier lieu que les points cherchés, s'ils existent, sont situés sur l'un des axes principaux qui se croisent au centre de gravité.

Supposons nulles les coordonnées y' et z', en sorte que les points cherchés doivent se trouver placés sur l'axe des x. En désignant par A', B', C' les moments d'inertie pris par rapport à trois axes passant par l'un de ces points et parallèles aux axes principaux qui se croisent au centre de gravité, on aura d'après le n° 280

$$A'=A, \quad B'=B+Mx'^2, \quad C'=C+Mx'^2.$$

Et puisque les trois moments d'inertie A', B', C' doivent être égaux entre eux,

$$x'^2=\frac{A-B}{M}=\frac{A-C}{M}.$$

L'existence de la propriété dont il s'agit exige donc 1° que les deux moments d'inertie B et C soient égaux entre eux, 2° que A soit plus grand que B et C. Ainsi les points tels que toutes les lignes qui s'y croisent sont des axes principaux ne peuvent subsister à moins que les deux plus petits moments d'inertie pris par rapport aux axes principaux qui se croisent au centre de gravité

du corps ne soient égaux entre eux ; et si cette condition a lieu, il existera deux de ces points placés sur l'axe principal par rapport auquel est pris le plus grand moment, à une distance du centre de gravité exprimée par la formule $x = \pm\sqrt{\frac{A-B}{M}}$.

Si les trois moments A, B, C étaient égaux entre eux, le centre de gravité serait le seul point du corps pour lequel toutes les lignes qui s'y croisent présentassent la propriété qui appartient aux axes principaux.

Évaluation des moments d'inertie.

296. L'évaluation du moment d'inertie d'un système de points matériels formant un corps solide, ce moment étant pris par rapport à un axe quelconque, est ramenée dans le n° 289 à la détermination des valeurs des trois moments d'inertie pris par rapport aux axes principaux qui se croisent au centre de gravité, et dont l'un des trois est nécessairement le plus petit des moments d'inertie qui puissent appartenir au corps. Le calcul de la valeur d'un moment d'inertie, exprimé en général par Smr^2, m désignant la masse d'un des points matériels du système; et r la distance de ce point à l'axe par rapport auquel est pris le moment, ne présente d'ailleurs aucune difficulté. S'il s'agit, non pas d'un assemblage de points matériels placés à certaines distances les uns des autres, mais d'un corps continu, la somme désignée par S deviendra une intégrale définie qui peut prendre diverses formes suivant le système de coordonnées que l'on adopte. En conservant les coordonnées rectangulaires,

et désignant par ρ la valeur de la masse de l'unité de volume de la matière du corps qui a lieu dans le point dont les coordonnées sont x, y, z, on aura évidemment

$$\int dx \int dy \int dz . \rho(x^2+y^2),$$

pour l'expression générale du moment d'inertie pris par rapport à l'axe des z. Les limites des intégrales sont déterminées par les valeurs des coordonnées qui appartiennent à la surface du corps, conformément à ce qui a été dit n° 76. Nous présenterons quelques exemples des calculs de ce genre.

297. Soit un parallélipipède rectangle homogène dont le centre est placé à l'origine des coordonnées, et dont les arêtes sont parallèles aux axes. En désignant respectivement par a, b, c les demi-longueurs des arêtes dirigées parallèlement aux x, aux y et aux z, l'expression du moment d'inertie pris par rapport à un axe passant par le centre de gravité et parallèle à l'arête c sera

$$\rho \int_{-a}^{a} dx \int_{-b}^{b} dy \int_{-c}^{c} dz(x^2+y^2) = \frac{8}{3} \rho . abc(a^2-b^2);$$

ou en désignant par M la masse entière du corps,

$$\frac{1}{3} M(a^2-b^2).$$

Si le moment d'inertie était pris par rapport à une des arêtes c, sa valeur serait

$$\frac{4}{3} M(a^2+b^2).$$

Il est visible d'ailleurs que les trois axes menés par le centre parallèlement aux arêtes sont ici les axes principaux ; que le plus grand des trois moments d'inertie relatifs à ces axes appartient à l'axe parallèle à la plus petite arête ; et que le plus petit des trois moments d'inertie dont il s'agit, appartient à l'axe parallèle à la plus grande. De plus, si c est la plus petite arête, et si les arêtes a, b sont égales entre elles, l'axe des z contient deux points tels que toutes les droites qui s'y croisent sont des axes principaux. Les distances de ces points à l'origine ont pour expression, conformément à ce qu'on a vu n° 295, $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(a^2 - c^2)}$.

298. Considérons un solide de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe des z. Le moment d'inertie pris par rapport à cet axe pourra s'exprimer par l'intégrale double

$$2\pi \int dx\, x^3 \int dz.\rho\,, \quad \text{ou} \quad 2\pi \int dz \int dx.\rho x^3\,,$$

π représentant le rapport de la circonférence au diamètre.

299. Si ce solide est un cône tronqué décrit par le trapèze AMNC (*fig.* 32), on aura en appelant a le rayon AM de la petite base, et θ l'angle au centre,

$$x = a + z \tang.\theta$$

pour l'équation de l'arête MN. La formule précédente deviendra donc, ρ étant supposée constante, et la hauteur AC du cône tronqué étant désignée par c,

$$2\pi.\rho \int_0^c dz \int_0^{a+z\tang.\theta} dx.x^3,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi}{2}.\rho\int_{0}^{c}dz(a+z\,\text{tang.}\theta)^4=\frac{\pi}{10}.\rho\frac{(a+c\,\text{tang.}\theta)^5-a^5}{\text{tang.}\theta}.$$

Cette expression du moment d'inertie d'un cône tronqué pris par rapport à son axe donne pour un cône entier, en faisant $a=0$,

$$\frac{\pi}{10}.\rho c^5\text{tang.}^4\theta.$$

La même expression devient, en faisant $\theta=0$,

$$\frac{\pi}{2}.\rho a^4c,$$

pour la valeur du moment d'inertie d'un cylindre droit pris par rapport à son axe, a étant le rayon de la base, et c la hauteur de ce cylindre. Le moment d'inertie du même cylindre, pris par rapport à une arête, est

$$\frac{3\pi}{2}.\rho a^4c.$$

300. Si le solide est une sphère dont le rayon est représenté par a, on a

$$x=\sqrt{a^2-z^2},$$

et, ce solide étant toujours supposé homogène, la formule du n° 298 donne, pour l'expression du moment d'inertie pris par rapport à un diamètre,

$$2\pi\rho\int_{-a}^{a}dz\int_{0}^{\sqrt{a^2-z^2}}dx.x^3;$$

ou bien

$$\frac{\pi}{2}.\rho\int_{-a}^{a}dz(a^4-2a^2z^2+z^4)=\frac{8\pi}{15}.\rho a^5.$$

Cette formule revient à $\frac{2}{5}Ma^2$, M désignant la masse de la sphère. Le moment d'inertie pris par rapport à une ligne tangente à la surface de la sphère est

$$\frac{28\pi}{15}.\rho a^5, \quad \text{ou} \quad \frac{7}{5}Ma^2.$$

301. Cherchons enfin l'expression des moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène pris par rapport aux trois axes de ce corps, qui sont évidemment les axes principaux passant au centre de gravité. Les demi-diamètres dirigés dans le sens des x, des y et des z étant représentés respectivement par a, b, c, et l'origine des coordonnées étant placée au centre, l'équation de la surface de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

d'où l'on déduit

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Par conséquent, la formule du n° 296 donne pour l'expression du moment d'inertie pris par rapport à l'axe des z, en effectuant d'abord l'intégration par rapport à z,

$$2\rho.c\int dx\int dy\,(x^2+y^2)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

qui peut s'écrire :

$$2\rho.c\left\{\int dx.x^2\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right.$$
$$\left.+\int dy.y^2\int dx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right\}.$$

Considérons l'intégrale

$$\int dy \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

dont les limites doivent être les valeurs de y en x données par l'équation $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ qui appartient à l'intersection du plan des xy avec la surface de l'ellipsoïde, c'est-à-dire $y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Si l'on fait, pour abréger, $r=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, cette intégrale pourra s'écrire :

$$\frac{1}{b}\int_{r}^{r} dy\sqrt{r^2-y^2};$$

et comme la quantité $\int_{-r}^{r} dy\sqrt{r^2-y^2}$ équivaut à l'aire d'un demi-cercle dont le rayon est r, on voit que la valeur de l'intégrale dont il s'agit est

$$\frac{\pi r^2}{2b}=\frac{\pi}{2}b\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

On aura donc, d'après cela,

$$\int dx.x^2\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{\pi}{2}b\int dx\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right),$$

et en effectuant l'intégration par rapport à x entre les limites $-a$ et a, il viendra définitivement

$$\int dx.x^2\int dy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}=\frac{2\pi}{15}a^3b.$$

On aura de la même manière

$$\int dy\, y^2 \int dx \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \frac{2\pi}{15}\, ab^3 :$$

ainsi le moment d'inertie cherché est

$$\frac{4\pi}{15} \cdot \rho abc(a^2+b^2).$$

Comme le volume de l'ellipsoïde est $\frac{4\pi}{3}\, abc$, on voit d'après les résultats précédents, qu'en désignant par M la masse totale de ce corps, on a respectivement

$$\frac{1}{5}\, M(b^2+c^2), \quad \frac{1}{5}\, M(a^2+c^2), \quad \frac{1}{5}\, M(a^2+b^2),$$

pour les trois moments d'inertie pris par rapport aux axes dont les demi-longueurs sont a, b et c.

Si a est le plus grand des trois demi-axes, le moment d'inertie $\frac{1}{5}M(b^2+c^2)$ est le plus petit des trois moments d'inertie précédents, et par conséquent le plus petit des moments d'inertie par rapport à une droite quelconque. Si c est le plus petit des demi-axes, le moment d'inertie $\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$ est au contraire le plus grand des trois moments d'inertie relatifs aux axes principaux qui se croisent au centre du corps, et par conséquent le plus grand des trois moments d'inertie relatifs à toutes les lignes qui peuvent être menées par ce centre. Si les demi-axes a et b sont égaux, en sorte que le corps soit un ellipsoïde de révolution, et si de plus le demi-axe c autour duquel la surface est décrite est plus petit que a et b, le plus grand des moments d'inertie étant alors $\frac{1}{5}Ma^2$, et les deux autres moments d'inertie étant $\frac{1}{5}M(a^2+c^2)$, il existe, d'après le n° 295,

deux point situés sur l'axe de révolution de part et d'autre du centre, à la distance $\sqrt{\frac{1}{5}(a^2-c^2)}$ de ce centre, tels que toutes les droites qui peuvent être menées par ces points sont des axes principaux *.

Mouvement d'un corps pesant autour d'un axe fixe horizontal. Centre d'oscillation.

302. Considérons un corps solide soumis à l'action de la gravité, et tournant autour d'un axe horizontal A (*fig.* 33) supposé fixe. Soit AB la trace d'un plan vertical passant par cet axe, le mouvement du corps doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = \frac{S.Pp}{S.mr^2},$$

donnée n° 279. En désignant par G la position du centre de gravité du corps au bout du temps t, par θ l'angle BAG, par c la distance AG, et par M la masse totale du corps, on a

$$v = -\frac{d\theta}{dt}, \quad S.Pp = Mg.c\sin.\theta,$$

et cette équation devient

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mgc}{S.mr^2}\sin.\theta.$$

En multipliant les deux membres par $d\theta$ et intégrant on trouve

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2Mgc}{S.mr^2}\cos.\theta + const.$$

---

* Les résultats précédents, et un grand nombre d'autres, sont contenus dans la formule de M. Dirichlet. Voyez les *Leçons d'Analyse*, p. 327.

Soit Θ la valeur initiale de l'angle θ, et V la valeur initiale de la vitesse angulaire : on aura

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 + \frac{2Mgc}{S.mr^2}(\cos.\theta - \cos.\Theta).$$

Cette équation étant résolue par rapport à dt et intégrée fera connaître la relation entre t et θ, et par conséquent la nature du mouvement du corps.

303. Si l'on considérait le mouvement d'un seul point matériel pesant, placé à la distance R de l'axe de rotation, on aurait pour l'équation du mouvement de ce point

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V^2 + \frac{2g}{R}(\cos.\theta - \cos.\Theta),$$

comme on peut le conclure du n° 168. On voit par là qu'un corps solide pesant prend autour d'un axe fixe horizontal le même mouvement qu'affecterait un point matériel assujetti à décrire autour de cet axe un cercle ayant pour rayon

$$R = \frac{S.mr^2}{Mc}.$$

Soit Mk^2 le moment d'inertie du corps pris par rapport à une ligne menée par son centre de gravité parallèlement à l'axe fixe : on aura d'après le n° 292 $S.mr^2 = M(c^2 + k^2)$; et par conséquent le rayon dont il s'agit a pour valeur

$$\frac{c^2 + k^2}{c}.$$

Un corps solide, d'une figure quelconque, oscillant autour d'un axe horizontal est nommé *pendule composé*, par opposition au *pendule simple* formé par un seul point matériel suspendu à un fil sans masse. La durée

des oscillation du pendule simple est égale à la durée des oscillations du pendule composé, lorsque la longueur du fil est égale à $\frac{c^2+k^2}{c}$.

304. On a nommé *centre d'oscillation* dans un corps qui oscille autour d'un axe fixe horizontal un point dans lequel on pourrait supposer concentrée la masse entière du corps sans altérer la nature et la durée des oscillations. Il résulte de ce qui précède, que tous les points situés dans un plan passant par l'axe fixe et par le centre de gravité, et dont la distance à l'axe fixe est égale à $\frac{c^2+k^2}{c}$, présentent la propriété dont il s'agit.

On peut remarquer de plus que la relation du centre d'oscillation au centre de suspension est réciproque, en sorte que le centre de suspension deviendrait centre d'oscillation si le centre d'oscillation devenait centre de suspension. En effet la distance du centre de gravité au centre de suspension étant $\frac{c^2+k^2}{c}-c=\frac{k^2}{c}$, la formule précédente appliquée au cas où le centre d'oscillation deviendrait centre de suspension, donne

$$\frac{\frac{k^4}{c^2}+k^2}{\frac{k^2}{c}}=\frac{k^2+c^2}{c}.$$

305. Il existe d'ailleurs dans un corps solide une infinité de droites telles qu'en les prenant pour axes de suspension, ce corps fera toujours autour de ces lignes des oscillations dont les durées sont égales entre elles. Désignons par α, β, γ les angles que forme avec les trois

axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps une parallèle à l'axe fixe menée par ce centre de gravité, et par A,B,C les moments d'inertie pris par rapport à ces axes principaux. On aura, d'après le n° 290, $Mk^2 = A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos.^2\gamma$; et par conséquent

$$\frac{A\cos.^2\alpha + B\cos.^2\beta + C\cos^2.\gamma + Mc^2}{Mc},$$

pour la longueur du pendule simple, dont les oscillations auraient une durée égale à celles du corps proposé. Or on peut faire varier d'une infinité de manières les valeurs des quantités α, β, γ et c, en conservant toujours la même valeur à l'expression précédente.

Soit A le plus petit des trois moments d'inertie A,B,C. La longueur c restant constante, la plus petite valeur de l'expression précédente sera

$$\frac{A + Mc^2}{Mc},$$

et le minimum de cette dernière expression répond à $c = \sqrt{\frac{A}{M}}$. Ainsi les axes de suspension autour desquels un corps solide exécute les oscillations dont la durée est la moindre possible, sont parallèles à celui des axes principaux passant par le centre de gravité auquel répond le plus petit des trois moments d'inertie, et sont distants de cet axe principal de la quantité $\sqrt{\frac{A}{M}}$, A désignant ce moment d'inertie minimum. La longueur du pendule simple dont les oscillations ont cette moindre durée est $2\sqrt{\frac{A}{M}}$.

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, produit par une impulsion. Centre de percussion.

306. Considérons, comme dans les n°s 277 et suivants, un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe que nous supposons coïncider avec l'axe des x. Le mouvement de ce corps sera déterminé, comme on l'a vu, n° 279, par l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mathrm{S.P}p}{\mathrm{S}.mr^2},$$

dans laquelle v est la vitesse angulaire du corps à la fin du temps t, S.Pp la somme des moments des forces qui sollicitent le corps, ces moments étant pris par rapport à l'axe fixe, et S.mr^2 le moment d'inertie du corps par rapport au même axe. Cette équation fera connaître, par l'intégration, le mouvement du corps, lorsque la position et la vitesse initiales de ce corps seront données.

Nous admettrons maintenant que le corps, étant immobile, reçoit instantanément une impulsion qui le met en mouvement. Il s'agit de déterminer la vitesse qu'il prendra par l'effet de cette impulsion, et les efforts que devra supporter l'axe fixe à l'instant où elle est donnée.

Relativement au sens que l'on doit attacher au mot *impulsion*, nous remarquerons qu'un corps solide étant supposé immobile, on peut concevoir qu'un effort très-grand est exercé pendant un temps fort petit sur un point de la surface de ce corps. Soit F cet effort (constant ou variable avec le temps) évalué en unités de poids, et τ la durée très-petite du

temps pendant lequel il est exercé. Si l'effort F était exercé contre un point matériel dont la masse fût m, et qui lui cédât librement, on aurait, en appelant u la vitesse acquise par ce point à la fin du temps t, $m\frac{du}{dt}=F$, par conséquent $mdu=Fdt$, et, à la fin du temps τ, $mu=\int_0^\tau Fdt$. On voit que l'intégrale $\int_0^\tau Fdt$ représente la quantité de mouvement qui peut être produite par l'action que nous considérons ici, et qui est la mesure de cette action. Nous pouvons poser pour abréger $\int_0^\tau Fdt=\Phi$; Φ désignera la quantité de mouvement imprimée, dans la direction de l'effort F, par l'action dont il s'agit, et s'exprimera généralement par le produit d'une masse par une vitesse. Ces notions sont conformes à ce qu'on a vu dans le n° 258.

Ajoutons d'ailleurs qu'une impulsion est souvent produite par un choc, c'est-à-dire par un corps en mouvement qui viendrait frapper le corps que l'on considère. Il est évident que dans ce cas une certaine quantité de mouvement est imprimée par l'effet du choc à chaque corps, en sens opposés, et dans la direction de la normale commune aux deux surfaces menée par le point de contact. Ainsi l'effet d'un choc sur un corps peut toujours être représenté en admettant qu'une quantité de mouvement Φ est imprimée, dans une direction donnée, en un certain point de ce corps. Mais la grandeur de la quantité Φ ne pourrait être

connue qu'au moyen d'une solution spéciale de la question, semblable à celle qui a été donnée dans l'Article XIX.

Enfin nous observerons que si le corps considéré a été frappé par un autre corps ayant une masse m et une vitesse V, et si après le choc les deux corps demeurent adhérents et ne forment qu'un seul système solide, on pourra regarder ce système comme ayant reçu une impulsion $\Phi = m\mathrm{V}$, et déterminer en conséquence, comme on va le voir tout à l'heure, le mouvement qui aura lieu immédiatement après le choc. L'impulsion Φ devra être censée appliquée au centre de gravité du second corps, et dirigée dans le sens du mouvement de ce centre de gravité.

Cela posé, nous représenterons par

Φ la quantité de mouvement imprimée par la force qui produit l'impulsion;

ξ, η, ζ, les coordonnées du point du corps où cette force est appliquée;

α, β, γ, les angles formées par sa direction avec les axes des x, des y et des z;

ϖ la plus courte distance de la direction de cette même force à l'axe des x avec lequel coïncide l'axe fixe autour duquel le corps est assujetti à se mouvoir;

V la vitesse angulaire avec laquelle le corps commence à tourner autour de l'axe fixe par l'effet de l'impulsion.

En se rappelant que d'après le n° 258 la quantité de mouvement prise par le corps doit faire équilibre

autour de l'axe fixe à la quantité de mouvement qui lui est imprimée, on aura comme dans les nos 277 et 279, l'équation

$$V.S.mr^2 = \Phi(\zeta\cos.6 - \eta\cos.\gamma) = \Phi.\varpi\sin.\alpha,$$

$S.mr^2$ désignant toujours le moment d'inertie du corps solide pris par rapport à l'axe fixe. Par conséquent la valeur de V déduite de cette équation, c'est-à-dire

$$V = \frac{\Phi(\zeta\cos.6 - \eta\cos.\gamma)}{S.mr^2} = \frac{\Phi.\varpi\sin.\alpha}{S\,mr^2},$$

donnera la vitesse angulaire initiale qui devra être attribuée au corps lorsqu'on voudra déterminer le mouvement qu'il prendra après l'impulsion.

307. A l'égard des efforts exercés sur l'axe fixe à l'instant où l'impulsion a lieu, efforts dont la considération est importante dans diverses applications, on reconnaît également d'après les nos 277 et suivants ; 1° qu'un effort exprimé par $\Phi\cos.\alpha$ est exercé parallèlement à l'axe fixe sur les points d'appui qui s'opposent au glissement du corps dans le sens de cet axe.

2° Que des efforts sont exercés perpendiculairement à l'axe fixe, dans le sens des y, dont la somme a pour valeur

$$\Phi\cos.6 - V.S.mz,$$

et dont la somme des moments pris par rapport à l'axe des z a pour valeur

$$\Phi.\xi\cos.6 - V.S.mxz.$$

3° Enfin que des effort sont exercés perpendiculaire-

ment à l'axe fixe, dans le sens des z, dont la somme est

$$\Phi\cos.\gamma+V.S.my,$$

et dont la somme des moments pris par rapport à l'axe des z a pour expression

$$\Phi.\xi\cos.\gamma+V.S.mxy.$$

308. D'après cela, si l'on veut que la somme des efforts exercés sur l'axe fixe soit nulle, il faudra d'abord poser $\cos.\alpha=0$, afin que l'effort exercé parallèlement à cet axe soit nul, en sorte que la direction de l'impulsion devra être perpendiculaire à l'axe fixe. Cette première équation étant satisfaite, on posera ensuite les équations

$$\cos.\beta-\frac{\varpi.S.mz}{S.mr^2}=0,\quad \cos.\gamma+\frac{\varpi.S.my}{S.mr^2}=0,$$

d'où l'on déduit, à cause de $\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1$,

$$\frac{\cos.\gamma}{\cos.\beta}=-\frac{S.my}{S.mz},\quad \text{et}\quad \varpi=\frac{S.mr^2}{\sqrt{(S.my)^2+(S.mz)^2}}=\frac{S.mr^2}{Mc},$$

en désignant comme dans le n° 302 par M la masse entière du corps et par c la distance de son centre de gravité à l'axe fixe. Il résulte de ces dernières équations 1° que la direction de l'impulsion devra être perpendiculaire au plan mené par l'axe fixe et par le centre de gravité du corps; 2° que la distance de la direction de l'impulsion à l'axe fixe devra être égale au moment d'inertie du corps pris par rapport à l'axe fixe divisé par le produit de sa masse par la distance du centre de gravité de ce corps à l'axe fixe.

Mais après que l'on a exprimé que la somme des efforts

exercés sur l'axe fixe est nulle, il n'en résulte pas nécessairement que cet axe ne supporte aucune action, parce qu'il serait possible que les efforts dont il s'agit formassent des couples. Si l'on veut donc que l'axe fixe ne soit sollicité à l'instant de l'impulsion ni par aucune force ni par aucun couple, il faudra écrire de plus

$$\xi\cos.\beta - \frac{\varpi.S.mxz}{S.mr^2} = 0, \quad \xi\cos.\gamma + \frac{\varpi.S.mxy}{S.mr^2} = 0,$$

ou en mettant pour cos. β et cos. γ leurs valeurs déduites des équations précédentes,

$$\xi.S.mz - S.mxz = 0, \quad \xi.S.my - S.mxy = 0;$$

et par conséquent

$$\xi = \frac{S.mxz}{S\,mz} = \frac{S.mxy}{S.my}.$$

On ne peut en général satisfaire à cette double équation sans supposer nulles à la fois les quantités $S.mxy$, $S.mxz$ et ξ; d'où il résulte que l'axe fixe doit être un des axes principaux du corps qui se croisent au point où cet axe est rencontré par le plan qui contient la direction de l'impulsion. Cette condition réunie aux deux précédentes établit d'une manière complète qu'il n'existe aucun effort exercé sur l'axe fixe à l'instant où l'impulsion es produite.

309. Les géomètres ont appelé *Centre de percussion* d'un corps tournant autour d'un axe fixe un point tel, qu'une force appliquée à ce point, en sens contraire de son mouvement, détruirait entièrement le mouvement du corps, en sorte que l'axe fixe ne supporterait

aucun effort à l'instant de cette destruction. On voit facilement d'après ce qui précède que le centre de percussion est placé dans le plan qui contient l'axe fixe et le centre de gravité du corps, et que sa distance à l'axe fixe est $\frac{S.mr^2}{Mc}$. Mais pour que la condition énoncée puisse être satisfaite, il faut que l'axe fixe soit un axe principal. Si cela a lieu, le centre de percussion est placé sur l'intersection du plan des deux autres axes principaux avec le plan qui contient cet axe et le centre de gravité du corps. On reconnaît d'ailleurs, d'après le n° 304, que la distance du centre de percussion à l'axe fixe est égale à celle du centre d'oscillation à ce même axe : mais ces deux points, dont la considération se rapporte à des propriétés mécaniques tout à fait distinctes, ne doivent pas être confondus.

310. Si le corps peut être partagé en deux parties égales et symétriques par un plan perpendiculaire à l'axe fixe, cet axe sera un des axes principaux appartenant au point où il rencontre ce plan. Le même plan contiendra d'ailleurs le centre de gravité du corps. Ainsi un choc exercé contre le corps ne produira alors aucun effort sur l'axe fixe, si la direction de l'impulsion est contenue dans le plan dont il s'agit, si elle est perpendiculaire à la ligne menée du centre de gravité à l'axe fixe, et si elle rencontre cette ligne à la distance $\frac{S.mr^2}{Mc}$ de l'axe fixe.

311. Lorsqu'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe, a reçu une impulsion en vertu de

laquelle il commence à se mouvoir avec la vitesse angulaire V donnée par l'équation obtenue dans le n° 306, le mouvement qu'il prend ensuite est déterminé, comme on l'a rappelé dans ce numéro, par l'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{S.Pp}{S.mr^2}$, qui se réduit à $\frac{dv}{dt} = 0$, lorsque le corps n'est sollicité par aucune force, en sorte qu'il conserve alors constamment la vitesse angulaire V qui lui a été imprimée. Pendant ce mouvement du corps, l'axe fixe supporte d'autres efforts, dont on a donné les valeurs dans le n° 280, pour le cas où le corps est sollicité par des forces, et dans le n° 282, pour le cas où ces efforts sont produits seulement par les forces centrifuges dont les parties du corps sont animées. On doit distinguer avec soin ces efforts permanents des actions instantanées dont les expressions viennent d'être données n° 307, et l'on reconnaît que les conditions qui rendraient nuls les efforts dus à la force centrifuge ne peuvent s'accorder avec celles qui rendraient nuls les efforts résultant d'un choc; et qu'un axe fixe ne peut pas être placé de manière à satisfaire en même temps aux conditions dont il s'agit.

XXI. Mouvement d'un corps solide entièrement libre dans l'espace.

312. Un corps solide étant considéré comme un assemblage de points matériels dont les positions respectives sont invariables, représentons généralement par

m la masse de l'un quelconque des points matériels;

x_1, y_1, z_1, les coordonnées du centre de gravité du corps à la fin du temps t, comptées sur trois axes rectangulaires fixes;

x, y, z, les coordonnées du point matériel à la fin du temps t, comptées à partir de ce centre de gravité sur trois axes rectangulaires respectivement parallèles aux trois axes précédents;

X, Y, Z, les valeurs, exprimées en unités de poids, des forces appliquées respectivement au point m dans le sens des axes, des x, des y et des z.

Les coordonnées des points matériels du système comptées à partir de l'origine fixe des x_1, y_1, z_1 étant à la fin du temps t, x_1+x, y_1+y, z_1+z, les forces perdues, par ces points matériels dans le sens de chacun des axes sont

$$X-m\frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2},\quad Y-m\frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2},\quad Z-m\frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2}.$$

Or le mouvement du corps étant assujetti à la condition que ces forces perdues doivent se faire continuellement équilibre, nous aurons ici, en appliquant les résultats du n°54 relatifs aux conditions de l'équilibre des forces appliquées à un corps solide entièrement libre, les six équations suivantes :

$$S\left(X-m\frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2}\right)=0,$$
$$S\left(Y-m\frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2}\right)=0,$$
$$S\left(Z-m\frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2}\right)=0,$$

$$S\left(X-m\frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2}\right)(y_1+y)-S\left(Y-m\frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2}\right)(x_1+x)=0,$$
$$S\left(Z-m\frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2}\right)(x_1+x)-S\left(X-m\frac{d^2x_1+d^2x}{dt^2}\right)(z_1+z)=0,$$
$$S\left(Y-m\frac{d^2y_1+d^2y}{dt^2}\right)(z_1+z)-S\left(Z-m\frac{d^2z_1+d^2z}{dt^2}\right)(y_1+y)=0.$$

D'après les propriétés du centre de gravité, on a

$$S.mx=0,\ S.my=0,\ S.mz=0,$$

ce qui réduit les trois premières équations (en remarquant d'ailleurs que x_1, y_1, z_1 doivent être regardées comme des quantités constantes relativement aux divers points matériels du système), à

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_1}{dt^2}&=S.X,\\ M\frac{d^2y_1}{dt^2}&=S.Y,\\ M\frac{d^2z_1}{dt^2}&=S.Z,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(1)$$

M désignant la masse entière du corps. Quant aux trois dernières équations, en effaçant les quantités qui sont nulles en vertu des précédentes, elles deviennent respectivement

$$\left.\begin{aligned} S.m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=S(Xy-Yx),\\ S.m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=S(Zx-Xz),\\ S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=S(Yz-Zy).\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\quad(2)$$

Les premier membres des équations (1) ne contiennent que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du centre de gravité du

corps. Ces équations donnent la loi du mouvement de ce point, et en les comparant aux équations du n° 141, on reconnaît évidemment que le centre de gravité du corps se meut dans l'espace comme il le ferait si toute la masse de ce corps y était concentrée, et si toutes les forces y étaient appliquées chacune suivant sa direction. Généralement les expressions des forces X, Y, Z contiennent les coordonnées x_1+x, y_1+y, z_1+z des différents points matériels, en sorte que le mouvement du centre de gravité dépend des mouvements des parties du corps par rapport à ce centre. Mais lorsque les valeurs des forces X, Y, Z sont indépendantes des coordonnées x, y, z, ou peuvent en être supposées indépendantes sans erreur sensible (comme cela aurait lieu pour les corps soumis à l'action de la pesanteur), les équations (1) détermineront entièrement le mouvement du centre de gravité.

Les premiers membres des équations (2) ne contiennent que les coordonnées relatives x, y, z qui appartiennent aux divers points du corps, et qui sont comptées du centre de gravité : ces équations expriment les conditions des mouvements des parties du corps autour de ce centre. Elles indiquent que si l'on considère seulement les mouvements du corps relativement au centre de gravité, les forces perdues se font équilibre autour de ce centre, comme cela aurait lieu s'il était maintenu dans une position fixe. Si les expressions des forces X, Y, Z sont indépendantes de la position du centre de gravité, ou si ces forces disparaissent dans les équations dont il s'agit, on en déduira la connaissance des mouvements du corps autour de

ce centre d'une manière tout à fait indépendante du mouvement absolu de ce point dans l'espace.

313. Si les points du corps solide ne sont sollicités par aucune force, les équations (1) se réduisent à

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=0,\quad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=0,\quad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=0.$$

Elles indiquent, conformément à ce qu'on a vu n° 142, que le centre de gravité de ce corps se meut alors en ligne avec une vitesse constante. Le mouvement du centre de gravité ne subit aucune altération, quoique les parties du corps puissent tourner autour de ce centre par l'effet de la première impulsion qui lui a été donnée.

314. Si les points du corps solide ne sont sollicités par aucune force, ou si la résultante des forces qui les sollicitent passe constamment par le centre de gravité (ce qui a lieu pour les corps pesants), les équations (2) se réduisent à

$$S.m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

$$S.m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$

$$S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0.$$

Elles peuvent s'écrire :

$$S.m\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=0,$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right)=0,$$

$$S.m\frac{d}{dt}\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)=0;$$

on aura donc, en intégrant

$$S.m\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=\nu,$$

$$S.m\left(x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}\right)=\mu,$$

$$S.m\left(z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}\right)=\lambda,$$

en désignant par ν, μ, λ trois constantes.

Remarquons que $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ sont les composantes parallèles aux axes des quantités de mouvement relatives au centre de gravité dont chaque partie matérielle du corps est animée à la fin du temps t. Si l'on concevait toutes ces parties matérielles sollicitées par des forces représentées par ces quantités de mouvement, et si l'on voulait composer ces forces conformément à ce qu'on a vu dans l'article IV, on trouverait les premiers membres des équations précédentes pour l'expression des couples situés dans les plans des xy, des xz, et des yz, couples qui mesurent l'action des forces dont il s'agit, pour faire tourner le corps solide autour des axes des z, des y et des x. Ces équations indiquent donc que les moments de ces couples conservent des valeurs constantes. Le moment du couple résultant, dont nous représenterons la valeur par ς, en posant

$$\varsigma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2},$$

conserve donc également une valeur constante, aussi bien que les angles formés par l'axe de ce couple avec

les axes des x, des y et des z, dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{\lambda}{\Sigma}, \frac{\mu}{\Sigma}, \frac{\nu}{\Sigma}.$$

315. Quel que soit le mouvement d'un corps relativement à son centre de gravité, on reconnaît, d'après ce qu'on a vu n° 249, que le déplacement qui a lieu dans chaque intervalle de temps infiniment petit dt, par l'effet de ce mouvement relatif, peut toujours être regardé comme dû à la rotation du corps autour d'une certaine ligne passant par le centre de gravité. La position de cette ligne change en général avec le temps, et on la nomme, par cette raison, *axe instantané de rotation*, ou simplement *axe instantané*. L'axe instantané de rotation tourne lui-même autour du centre de gravité, et prend diverses inclinaisons par rapport aux plans fixes des coordonnées.

Pour nous former une idée plus précise du mouvement du corps autour de son centre de gravité, supposons qu'à un certain instant l'axe instantané de rotation coïncide avec l'axe des x, et que le corps tourne autour de cet axe avec la vitesse angulaire v. Soit m (fig. 34) l'un quelconque des points matériels du corps solide. mq, mp et mn sont les trois coordonnées x, y, z de ce point, et ma sa distance r à l'axe des x. Il se meut avec la vitesse vr suivant un arc décrit du point a, avec le rayon ma ou r, dans le plan nmp perpendiculaire à l'axe des x. Cela posé, considérons la quantité de mouvement mvr dont le point matériel est animé, qui est dirigée suivant l'arc dont on vient de parler, et proposons-nous de com-

poser toutes les quantités de mouvement analogues qui appartiennent aux divers points du corps. En opérant conformément à ce qu'on a vu dans l'article IV, nous décomposerons d'abord ces quantités de mouvement en d'autres dirigées suivant les axes des coordonnées; et comme la quantité de mouvement mvr donne zéro pour sa composante dirigée dans le sens des x, $mvr.\frac{z}{r}$ ou mvz pour sa composante dans le sens des y, et $-mvr.\frac{y}{r}$ ou $-mvz$ pour sa composante dans le sens des z, le résultat de la composition dont il s'agit donnera en premier lieu

$$0, \quad v.\mathrm{S}mz, \quad -v.\mathrm{S}my,$$

pour les trois résultantes partielles appliquées à l'origine des coordonnées dans le sens des trois axes. Ces résultantes sont nulles toutes les trois, puisque cette origine est ici placée dans le centre de gravité du corps. On aura en second lieu

$$-v.\mathrm{S}\, mxz, \quad -v.\mathrm{S}.mxy, \quad v.\mathrm{S}.m(y^2+z^2),$$

pour les moments des trois couples agissant dans les plans des xy, des xz et des yz, ou dont les axes sont respectivement les axes des z, des y et des x. On voit que les deux premiers de ces couples seraient nuls dans le cas particulier où l'axe instantané de rotation coïnciderait avec un des axes principaux du corps appartenant à son centre de gravité.

En composant ces deux premiers couples dont oz et oy sont les axes, on trouvera un couple résultant dont l'axe sera une certaine ligne oF tracée dans le plan des

yz, et formant avec l'axe des y un angle Foy dont la tangente trigonométrique est

$$\frac{S.mxy}{S.mxz}.$$

En composant ensuite ce couple résultant avec le troisième couple dont le moment est $\nu.Sm(y^2+x^2)$, ou $\nu.Smr^2$, et dont ox est l'axe, on trouvera le couple résultant total, dont l'axe sera une droite oG dirigée dans le plan des lignes oE et ox. Ce couple résutant total n'est autre chose que celui dont nous avons désigné, dans le n° précédent, le moment par z, et dont la grandeur et la direction demeurent nécessairement constantes pendant toute la durée du mouvement du corps.

Il résulte de ce qui précède que si l'on représente par θ l'angle compris à un instant donné entre l'axe oG du couple résultant des quantités de mouvement dont les parties du corps sont animées et l'axe instantané de rotation ox, 1° l'on aura

$$z.\cos.\theta=\nu.S.mr^2,$$

pour le moment du couple composant dont l'axe coïncide avec l'axe instantané de rotation; moment qui est égal, comme on le voit, au produit de la vitesse angulaire par le moment d'inertie du corps pris par rapport à cet axe instantané.

2° l'on aura

$$z.\sin.\theta=\nu\sqrt{(S.mxz)^2+(S.mxy)^2},$$

pour le moment du couple composant dont l'axe oF est dirigé perpendiculairement à l'axe instantané ox, et

dans le plan passant par cet axe et par l'axe oG du couple résultant.

316. Considérons maintenant les forces centrifuges dont sont animées les parties du corps, et qui tendent en général, conformément à ce qu'on a vu dans les n°s 282 et suivants, à déplacer l'axe instantané de rotation. La force centrifuge mv^2r agissant sur le point m est dirigée suivant le prolongement du rayon am, et l'on verra, comme dans le n° 282, qu'elle donne dans le sens de l'axe des x une composante nulle, dans le sens de l'axe des y la composante $mv^2r.\frac{y}{r}$ ou mv^2y, et dans le sens de l'axe des z la composante $mv^2r.\frac{z}{r}$ ou mv^2z. En composant toutes les forces centrifuges appartenant aux divers points matériels, nous aurons d'abord

$$0, \quad v^2S.my, \quad v^2S.mz,$$

pour les trois résultantes partielles appliquées à l'origine des coordonnées dans le sens des trois axes, résultantes dont les valeurs sont nulles. Nous trouverons ensuite

$$-v^2S.mxy, \quad v^2S.mxz, \quad 0,$$

pour les moments des trois couples dont les axes sont respectivement les axes des z, des y et des x.

En composant les deux premiers couples, on aura donc le couple résultant total provenant des forces centrifuges, et l'on trouvera pour l'axe de ce couple une certaine ligne oH dirigée dans le plan des yz, et formant avec l'axe des y un angle Hoy dont la tangente trigonométrique est

$$-\frac{S.mxz}{S.mxy};$$

d'où l'on conclut, en rapprochant ce résultat de ce que l'on vient de voir dans le numéro précédent, 1° que le couple résultant donné par les forces centrifuges a pour axe une ligne perpendiculaire au plan passant par l'axe instantané de rotation ox, et par l'axe oG du couple résultant des quantités de mouvement dont les parties du corps sont animées; ou, si l'on veut, que le couple résultant, donné par les forces centrifuges, agit toujours dans le plan passant par ces deux axes ox et oG.

2° Que le moment de ce couple résultant des actions des forces centrifuges est exprimé par

$$v^2\sqrt{(\mathrm{S}.mxy)^2+(\mathrm{S}.mxz)^2}=v.\mathrm{I}\sin.\theta.$$

Mouvement d'un corps solide libre dans l'espace produit par une impulsion.

317. Concevons un corps solide immobile, entièrement libre dans l'espace, et admettons qu'il reçoive instantanément une impulsion dont l'effet, conformément aux notions rappelées dans le n° 306, peut toujours être représenté en admettant qu'une certaine quantité de mouvement a été imprimée en un point du corps, suivant une direction donnée. Il s'agit de déterminer le mouvement que prendra le corps par l'effet de cette impulsion; et l'on y parviendra toujours en se rappelant, d'après le n° 258, que les quantités de mouvement acquises par les diverses parties du corps, et la quantité de mouvement qui lui a été imprimée, prise en sens contraire, doivent se faire réciproquement équilibre.

Le corps étant considéré dans la position qu'il occupe

à l'instant où l'impulsion est donnée, et les axes des x, y, z passant par son centre de gravité, désignons par

m la masse de la partie matérielle du corps solide qui est placée au point dont les coordonnées sont x, y, z;

$U_{,}, V_{,}, W_{,}$ les vitesses absolues du centre de gravité du corps, qui ont lieu par l'effet de l'impulsion, dans le sens des x, des y et des z;

$U_{,}+U$, $V_{,}+V$, $W_{,}+W$ les vitesses absolues de la partie matérielle placée au point dont les coordonnées sont x, y, z, vitesses également produites dans les mêmes sens par l'effet de l'impulsion, en sorte que U, V, W représenteront celles qui sont dues au mouvement du corps autour de son centre de gravité regardé comme un point fixe;

Φ la quantité de mouvement imprimée par la force qui produit l'impulsion;

ξ, η, ζ les coordonnées du point du corps où cette force est appliquée;

α, β, γ les angles formés par sa direction avec les axes des x, des y et des z;

ϖ, ρ, σ les plus courtes distances de cette direction aux mêmes axes.

Nous aurons d'abord pour exprimer les conditions de l'équilibre des quantités de mouvement qui doivent se détruire sur le corps solide, conformément à ce qu'on a vu dans l'article XIV, les équations de l'équilibre de translation

$$S.m(U_{,}+U)=\Phi\cos.\alpha,\ S.m(V_{,}+V)\Phi\cos.\beta,\ S.m(W_{,}+W)=\Phi\cos.\gamma.$$

Mais, par la nature du centre de gravité, on a toujours $S.mx=0$, $S.my=0$, $S.mz=0$; par conséquent

$$S.m\frac{dx}{dt}=0,\quad S.m\frac{dy}{dt}=0,\quad S.m\frac{dz}{dt}=0.$$

Donc les termes $S.mU$, $S.mV$, $S.mW$ disparaissent des équations précédentes, lesquelles, en nommant M la masse entière du corps, se réduisent à

$$MU_{,}=\Phi\cos.\alpha\,,\quad MV_{,}=\Phi\cos.\beta\,,\quad MW_{,}=\Phi\cos.\gamma.$$

Ces équations déterminent les vitesses que l'impulsion imprime au centre de gravité du corps, et l'on voit que ce centre de gravité prendra toujours, par l'effet d'une impulsion quelconque, le mouvement qui aurait lieu si la masse entière du corps était concentrée en ce point, et si l'impulsion y était appliquée.

318. En second lieu, les équations de l'équilibre de rotation seront

$$\begin{aligned}
S.m[y(U_{,}+U)-x(V_{,}+V)]&=\Phi.\sigma\sin.\gamma,\\
S.m[x(W_{,}+W)-z(U_{,}+U)]&=\Phi.\rho\sin.\beta,\\
S.m[z(V_{,}+V)-y(W_{,}+W)]&=\Phi.\varpi\sin.\alpha,
\end{aligned}$$

qui se réduisent, en supprimant les termes nuls, à

$$\begin{aligned}
S.m(yU-xV)&=\Phi.\sigma\sin.\gamma\\
S.m(xW-zU)&=\Phi.\rho\sin.\beta\\
S.m(zV-yW)&=\Phi.\varpi\sin.\alpha.
\end{aligned}$$

Pour connaître facilement au moyen de ces équations le mouvement que prendra le corps solide autour de son centre de gravité par l'effet de l'impulsion, nous rappellerons que ce mouvement consistera toujours en une rotation autour d'une certaine droite passant par ce centre, ou en trois rotations passant autour des trois

axes rectangulaires. Soient donc P, Q, R les trois vitesses angulaires que doit prendre le corps solide autour des x, des y et des z l'effet de l'impulsion. On aura, d'après les relations m du n° 249,

$$U = yR - zQ,$$
$$V = zP - xR,$$
$$W = xQ - yP,$$

et en substituant ces valeurs dans les équations précédentes, il viendra

$$S.m[(x^2+y^2)R - yzQ - zxP] = \Phi.\sigma\sin.\gamma,$$
$$S.m[(x^2+z^2)Q - xyP - yzR] = \Phi.\rho\sin.\beta,$$
$$S.m[(y^2+z^2)P - xzP - xyQ] = \Phi.\varpi\sin.\alpha,$$

équations par lesquelles les vitesses P, Q, R sont déterminées.

319. On leur donnera une forme plus simple si l'on prend pour les axes des coordonnées x, y, z, dont la position est tout à fait arbitraire, les trois axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps solide. On aura alors $S.mxy=0$, $S.mxz=0$ et $S.myz=0$; et en représentant, comme dans les n°s 287 et suivants, par A, B, C les moments d'inertie principaux, il viendra simplement

$$CR = \Phi.\sigma\sin.\gamma, \quad \text{d'où} \quad R = \frac{\Phi.\sigma\sin.\gamma}{C},$$
$$BQ = \Phi.\rho\sin.\beta, \qquad Q = \frac{\Phi.\rho\sin.\beta}{B},$$
$$AP = \Phi.\varpi\sin.\alpha, \qquad P = \frac{\Phi.\varpi\sin.\alpha}{A}.$$

Nous savons d'ailleurs que les trois vitesses angu-

laires P,Q,R répondent à une vitesse angulaire ν dont la valeur est

$$\nu=\sqrt{P^2+Q^2+R^2},$$

et qui a lieu autour d'une ligne formant avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{P}{\nu},\ \frac{Q}{\nu},\ \frac{R}{\nu}:$$

le mouvement imprimé au corps par une impulsion quelconque est donc entièrement déterminé.

320. Si la direction de l'impulsion passait par le centre de gravité du corps, on aurait $\varpi=0$, $\rho=0$, $\sigma=0$, et par conséquent les trois vitesses angulaires seraient nulles. Donc le corps ne tournerait pas alors autour de son centre de gravité; l'effet de l'impulsion se réduirait à imprimer une vitesse à ce centre, conformément à ce qu'on a vu n° 317.

321. Si la direction de l'impulsion était contenue dans un des plans des coordonnées, par exemple dans le plan des yz, en sorte qu'elle rencontrât les deux axes principaux du corps, qui coïncident avec les axes des y et des z, on aurait

$$R=0,\ Q=0,\ P=\frac{\Phi.\varpi}{A}.$$

Le corps prendrait autour de l'axe des x, c'est-à-dire autour du troisième axe principal, la vitesse angulaire $\frac{\Phi.\varpi}{A}$. Ainsi lorsqu'un corps reçoit une impulsion, il commence à tourner autour d'un des axes principaux pas-

sant par son centre de gravité toutes les fois que cette impulsion est dirigée dans le plan qui contient les deux autres axes principaux passant par ce même centre.

322. Quant au mouvement du corps solide qui a lieu après l'instant où il a reçu l'impulsion, ce mouvement dépend des équations différentielles données n° 312, et s'effectuera conformément à ce qui a été dit dans ce numéro et les suivants. Nous pouvons d'ailleurs, avec M. Poinsot, donner une image sensible de la nature du mouvement dont il s'agit.

Remarquons que d'après les premières équations du n° 318, et à l'origine du mouvement, les moments des couples formés par les quantités de mouvement des parties du corp, moments dont les axes coïncident avec ceux des x, y, z, doivent être respectivement égaux aux moments des quantités de mouvement imprimées par la force qui produit l'impulsion, pris par rapport aux mêmes axes. De plus, d'après le n° 314, si l'on compose à un instant quelconque les quantités de mouvement des parties du corps, on doit retrouver autour de chaque axe les couples dont les moments ont été désignés par les constantes λ, μ, ν, donnant un couple résultant total constant en grandeur et en direction, dont le moment a été désigné par $\varkappa$. Nous avons donc ici, pour la détermination des constantes λ, μ, ν,

$$\lambda = \Phi.\varpi \sin.\alpha, \quad \mu = \Phi.\rho \sin.\beta, \quad \nu = \Phi.\sigma \sin.\gamma,$$

d'où

$$\varkappa = \Phi \sqrt{\varpi^2 \sin.^2\alpha + \rho^2 \sin.^2\beta + \sigma^2 \sin.^2\gamma};$$

et par conséquent, d'après les résultats du n° 319

$$\lambda = AP, \quad \mu = BQ, \quad \nu = CR,$$

d'où

$$\Sigma = \sqrt{A^2P^2 + B^2Q^2 + C^2R^2},$$

P,Q,R étant les trois vitesses angulaires initiales. On conclut de là que l'axe du couple résultant total Σ, dont la direction doit demeurer invariable, forme avec les axes des x, des y et des z, qui coïncident ici avec les axes principaux du corps passant par son centre de gravité au premier instant du mouvement, des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{AP}{\Sigma}, \quad \frac{BQ}{\Sigma}, \quad \frac{CR}{\Sigma},$$

tandis que l'axe instantané de rotation, autour duquel le corps commence à tourner, forme avec les mêmes axes des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{P}{\nu}, \quad \frac{Q}{\nu}, \quad \frac{R}{\nu},$$

ν étant (comme dans le n° 319) la vitesse angulaire initiale résultante des trois vitesses angulaires P,Q,R.

Cela posé, considérons l'ellipsoïde appelé par M. Poinsot *ellipsoïde central*, dont les axes rectangulaires coïncident avec les axes principaux qui se croisent au centre de gravité du corps solide, et dont chaque rayon vecteur a une valeur égale à l'unité divisée par la racine carrée du moment d'inertie du corps pris par rapport à ce rayon. L'équation de cet ellipsoïde étant, comme on l'a vu n° 287,

$$1 = Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

la normale menée au point de la surface dont les coor-

données sont x, y, z forme avec les axes des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{Ax}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}, \quad \frac{Bx}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}, \quad \frac{Cx^2}{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}.$$

Donc si nous prenons x, y, z pour représenter les vitesses angulaires initiales P, Q, R, et par conséquent le rayon vecteur au point de la surface de l'ellipsoïde central déterminé par ces coordonnées pour représenter en grandeur la vitesse angulaire initiale ν, et en direction l'axe de rotation sur lequel le corps tourne au premier instant, la normale menée à la surface de l'ellipsoïde en ce point représentera l'axe du couple du résultant Σ des quantités de mouvement de toutes les parties matérielles du corps solide.

D'après cela, concevant l'ellipsoïde central contruit, il est aisé de déterminer le mouvement initial du corps solide résultant d'une impulsion donnée. Car menant l'axe oG (fig. 35) du couple Σ dont le moment est égal au moment de cette impulsion, on cherchera le point M de la surface de l'ellipsoïde central où la normale est parallèle à oG; et le rayon vecteur oM dirigé du centre de gravité du corps à ce point sera l'axe instantané de rotation au premier instant. De plus si l'on désigne, comme ci-dessus, par θ l'angle GoM compris entre l'axe oG du couple Σ et l'axe de rotation initiale oM, on aura pour déterminer la vitesse angulaire initiale ν autour de cet axe l'équation

$$\nu.S.mr^2 = \Sigma \cos.\theta,$$

$S.mr^2$ étant le moment d'inertie du corps pris par rapport à l'axe oM.

Nous supposerons ici que l'on ait coupé la surface de l'ellipsoïde central par le plan des deux axes oG et oM suivant la courbe GMP ; et que l'on ait mené par le centre de cet ellipsoïde un plan perpendiculaire à l'axe oG du couple d'impulsion, ou parallèle au plan qui touche la surface au point M. Ce dernier plan sera perpendiculaire au premier, qu'il rencontrera suivant la ligne oP ; il coupera la surface de l'ellipsoïde suivant la courbe PHN, et le diamètre oP sera conjugué au diamètre oM dans l'ellipse GMP.

323. Il reste maintenant à connaître le mouvement affecté par le corps après le premier instant. Observons que, d'après ce qu'on a vu n° 316, l'axe du couple résultant des actions dues aux forces centrifuges devant être perpendiculaire au plan des deux axes oG et oM, sera ici une ligne oH tracée dans le plan de la section PHN perpendiculairement à oP. Et si l'on veut connaître l'axe instantané sur lequel ces forces centrifuges tendent à faire tourner le corps solide, on devra, conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent, chercher le point de la surface de l'ellipsoïde central où la normale serait parallèle à l'axe oH, point qui n'est autre que l'extrémité N du diamètre oN conjugué au diamètre oP dans l'ellipse PHN. Le troisième diamètre oN conjugué dans l'ellipsoïde central à l'axe instantané de rotation oM, et à la projection oP de cet axe instantané sur le plan du couple d'impulsion, est donc l'axe sur lequel les forces centrifuges tendent à faire tourner le corps solide. Or, pour connaître la position du corps au second instant de son mouvement, on doit composer sa vitesse de rotation actuelle v, qui a lieu autour de

l'axe oM, avec la vitesse de rotation infiniment petite que les forces centrifuges impriment dans l'élément du temps autour de l'axe oN. Prenant donc oM pour représenter la vitesse v; puis sur la ligne oN, à partir du point o, une ligne infiniment petite qui représentera la vitesse imprimée par les forces centrifuges, on achèvera le parallélogramme. La diagonale représentera en grandeur la vitesse angulaire que prendra le corps au second instant, et déterminera la direction de l'axe instantané autour duquel ce corps tournera.

Mais puisque oN est parallèle au plan tangent à la surface de l'ellipsoïde passant par le point M, l'extrémité de cette diagonale se trouvera dans ce plan. Or d'une part le plan tangent dont il s'agit ne doit pas cesser de représenter le plan du couple résultant des quantités de mouvement dont sont animées toutes les parties du corps, qui doit conserver constamment une position fixe; et d'autre part l'axe instantané de rotation doit toujours coïncider avec le rayon vecteur mené au point où la surface de l'ellipsoïde central serait touchée par ce même plan. D'ailleurs on passera toujours du mouvement du corps à un instant donné au mouvement qui aura lieu dans l'instant suivant, d'une manière conforme à ce qui vient d'être indiqué. Donc on peut se représenter le mouvement du corps solide, libre autour de son centre de gravité, en admettant que ce centre étant fixe dans l'espace, aussi bien que le plan tangent mené à la surface de l'ellipsoïde central parallèlement au plan du couple donné par la force d'impulsion, cet ellipsoïde central roule sans glisser sur le plan tangent. Le rayon vecteur mené au point de contact de l'ellipsoïde et du

plan, est l'axe instantané de rotation : la vitesse angulaire est proportionnelle à la longueur de ce rayon.

Si le plan du couple d'impulsion est perpendiculaire à l'un des axes principaux du corps passant par son centre de gravité, c'est-à-dire à l'un des axes rectangulaires de l'ellipsoïde central, la vitesse imprimée par les forces centrifuges est nulle. L'ellipsoïde central ne subit aucun déplacement, et le corps continue à tourner autour de l'axe principal dont il s'agit avec une vitesse angulaire constante, conformément à ce qu'on a vu n° 321.

XXII. Propriétés générales du mouvement d'un système de corps.

324. L'équation obtenue dans les n°s 255 et suivants,

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

exprime d'une manière générale les lois du mouvement d'un système quelconque de points matériels. On doit concevoir, pour la solution de chaque question particulière, qu'à cette équation sont réunies les équations de condition qui définissent la nature du système. Mais quels que soient les systèmes que l'on considère, les mouvements qu'ils affectent offrent plusieurs propriétés générales dont l'étude est importante, et qui peuvent être déduites facilement de l'équation dont il s'agit.

Mouvement du centre de gravité.

325. Dans cette équation, x, y, z représentent les coordonnées du lieu où se trouve à la fin du temps t le point matériel dont la masse est m, ces coordonnées étant comptées sur trois axes rectangulaires fixes. Désignons maintenant par x_1, y_1, z_1 les coordonnées à la fin du temps t du centre de gravité de tous les points matériels du système comptées sur les mêmes axes; et par ξ, η, ζ les coordonnées du lieu où se trouve à la fin du temps t le point du système dont la masse est m, ces dernières coordonnées étant comptées à partir du centre de gravité sur des axes rectangulaires mobiles parallèles aux premiers. On devra donc substituer dans l'équation précédente $x_1+\xi$, $y_1+\eta$, $z_1+\zeta$ à la place de x, y, z, ce qui donnera

$$S.m\left[\frac{d^2x_1+d^2\xi}{dt^2}(\delta x_1+\delta\xi)+\frac{d^2y_1+d^2\eta}{dt^2}(\delta y_1+\delta\eta)+\frac{d^2z_1+d^2\zeta}{dt^2}(\delta z_1+\delta\zeta)\right]$$
$$=S[X(\delta x_1+\delta\xi)+Y(\delta y_1+\delta\eta)+Z(\delta z_1+\delta\zeta)].$$

Mais d'après les propriétés du centre de gravité, on aura toujours

$$S.m\xi=0,\quad S.m\eta=0,\quad S.m\zeta=0;$$

par conséquent

$$S.m\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\quad S.m\frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\quad S.m\frac{d^2\zeta}{dt^2}=0;$$

et

$$S.m\delta\xi=0,\quad S.m\delta\eta=0,\quad S.m\delta\zeta=0.$$

L'équation précédente peut donc s'écrire

$$S.m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1+\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right)$$
$$=S[X(\delta x_1+\delta\xi)+Y(\delta y_1+\delta\eta)+Z(\delta z_1+\delta\zeta)].$$

Cela posé, si le système est entièrement libre, ou peut se déplacer d'une manière quelconque dans l'espace, les équations exprimant la nature du système n'indiqueront alors que les conditions d'après lesquelles les divers points matériels se meuvent les uns par rapport aux autres, et ne contiendront que les coordonnées ξ, η, ζ par lesquelles les positions relatives de ces points sont déterminées, et non pas les coordonnées x_1, y_1, z_1, qui dépendent de la position absolue du système dans l'espace. Donc les variations δx_1, δy_1, δz_1, doivent alors être regardées comme entièrement arbitraires ; et par conséquent il est nécessaire, pour que l'équation précédente soit toujours satisfaite, que l'on ait les équations distinctes

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\,\mathrm{S}.m=\mathrm{S}.\mathrm{X}\,,\ \frac{d^2y_1}{dt^2}\,\mathrm{S}.m=\mathrm{S}.\mathrm{Y}\,,\ \frac{d^2z_1}{dt^2}\,\mathrm{S}.m=\mathrm{S}.\mathrm{Z}\,,$$

par lesquelles le mouvement du centre de gravité est déterminé.

Les termes S.X, S.Y, S.Z de ces équations sont uniquement donnés par les forces extérieures, et les actions mutuelles qui seraient dues aux contractions ou extensions supportées par les parties du système, ou à des forces d'attraction ou de répulsion que l'on supposerait exister entre les points matériels, n'y entrent point ; puisque les actions intérieures qui consistent toujours dans des forces égales une à une, et directement opposées, étant transportées au centre de gravité, auront nécessairement une résultante nulle. On conclut donc de ce qui précède qu'un système quelconque entièrement libre se meut toujours de telle manière que le mou-

vement du centre de gravité est celui qui aurait lieu si toutes les masses étaient réunies dans ce point, et si toutes les forces extérieures y étaient appliquées chacune suivant sa direction.

On remarquera d'ailleurs qu'après avoir égalé séparément à zéro les termes affectés des variations δx_1, δy_1, δz_1, il reste l'équation

$$S.m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right)=S(X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta\zeta),$$

par laquelle sont réglés les mouvements des points du système relativement à leur centre de gravité.

326. Le système étant toujours supposé libre, admettons qu'il ne soit soumis à l'action d'aucune force extérieure, et que son mouvement soit uniquement dû à des vitesses initiales imprimées aux points matériels. Le second membre de l'équation étant alors nul, elle se réduit à

$$S.m\left(\frac{d^2x_1}{dt^2}\delta x_1+\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right)=0;$$

et l'on a en premier lieu, comme ci-dessus, les trois équations

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}S.m=0,\quad \frac{d^2y_1}{dt^2}S.m=0,\quad \frac{d^2z_1}{dt^2}S.m=0,$$

qui donnent en les intégrant par rapport au temps,

$$\frac{dx_1}{dt}S.m=A,\quad \frac{dy_1}{dt}S.m=B,\quad \frac{dz_1}{dt}S.m=C,$$

A, B, C désignant des constantes. Ainsi dans le cas dont il s'agit, quels que soient les mouvements relatifs des par-

ties du système, le centre de gravité décrit une ligne droite d'un mouvement uniforme.

327. Considérons d'ailleurs les quantités de mouvement absolues des points matériels du système qui ont lieu à la fin du temps t, et dont les composantes dans le sens de chaque axe sont représentées pour le point matériel dont la masse est m, par

$$m\frac{dx}{dt},\ m\frac{dy}{dt},\ m\frac{dz}{dt};$$

ou bien par

$$m\frac{dx_{,}+d\xi}{dt},\ m\frac{dy_{,}+d\eta}{dt},\ m\frac{dz_{,}+d\zeta}{dt}.$$

Les sommes de ces composantes sont donc respectivement dans le sens des x, des y et des z

$$\mathrm{S}.m\frac{dx_{,}+d\xi}{dt},\ \mathrm{S}.m\frac{dy_{,}+d\eta}{dt},\ \mathrm{S}.m\frac{dz_{,}+d\zeta}{dt}.$$

Mais d'après la remarque faite dans le n° 325 on a toujours

$$\mathrm{S}.m\frac{d\xi}{dt}=0,\ \mathrm{S}.m\frac{d\eta}{dt}=0,\ \mathrm{S}.m\frac{d\zeta}{dt}=0.$$

Donc les expressions des sommes dont il s'agit se réduisent aux quantités

$$\frac{dx_{,}}{dt}\mathrm{S}.m,\ \frac{dy_{,}}{dt}\mathrm{S}.m,\ \frac{dz_{,}}{dt}\mathrm{S}.m,$$

qui d'après le n° précédent conservent pendant toute la durée du mouvement les valeurs constantes qui ont été désignées par A, B, C.

On conclut de cette dernière considération que si l'on entreprenait de composer à un instant quelconque les

quantités de mouvement dont sont animés tous les points matériels du système, conformément à la méthode expliquée dans les nos 54 et suivants, on trouverait toujours que ces quantités de mouvement étant transportées à l'origine des coordonnées et décomposées suivant les trois axes donneraient des résultantes partielles invariables, dont les constantes A, B, C représentent les valeurs; et par conséquent que la résultante appliquée à l'origine des coordonnées serait également invariable en grandeur et en direction.

Il résulte donc de ce qui précède 1° que le centre de gravité du système se meut constamment en une ligne droite d'un mouvement uniforme; 2° que si l'on prend à un instant quelconque la résultante des quantités de mouvement de tous les points matériels, on trouvera toujours que la direction de cette résultante coïncide avec la droite décrite par le centre de gravité et que sa valeur est égale à la somme des masses du système multipliée par la vitesse du centre de gravité.

Les propositions qui viennent d'être énoncées établissent le *principe de la conservation du mouvement de centre de gravité*. Ce principe convient à tout système libre, qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure. Les propositions dont il s'agit sont d'ailleurs absolument indépendantes des actions intérieures qui peuvent exister entre les points matériels; elles subsistent également lorsque ces points sont réunis par des verges et des fils inextensibles, par des liens élastiques, ou lorsqu'il existe seulement entre eux des forces attractives ou répulsives, ou quand ils sont absolument sans action les uns sur les autres. Enfin elles

conviennent même aux cas où il survient entre les parties du système, des chocs, par l'effet desquels les vitesses des points matériels sont regardées comme subissant instantanément des changements finis; puisque ces changements sont causés par des actions intérieures exercées entre les parties du système.

328. Si, au lieu de considérer un mouvement continu dû a l'action permanente de forces accélératrices, on voulait connaître l'effet de plusieurs impulsions données instantanément aux divers points du système, on remarquerait, d'après le n° 358, que les mouvements pris par ces points sont assujettis à la condition que les quantités de mouvement perdues se fassent équilibre sur le système. Désignant par ϕ la quantité de mouvement imprimée au point du système dont la masse est m, et par α, β, γ les angles formés avec les axes des x, des y et des z par la direction de la force qui imprime cette quantité de mouvement, les quantités de mouvement perdues par ce point dans le sens de chaque axe seront respectivement

$$\phi\cos.\alpha - m\frac{dx}{dt}, \quad \phi\cos.\beta - m\frac{dy}{dt}, \quad \phi\cos.\gamma - m\frac{dz}{dt};$$

et par conséquent la condition de l'équilibre des quantités de mouvement perdues par toutes les parties du système sera exprimée par l'équation

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) = S.\phi(\delta x.\cos.\alpha + \delta y.\cos.\beta + \delta z.\cos.\gamma).$$

Il est aisé d'en conclure, d'après ce qu'on a vu n° 325, que l'on doit avoir les trois équations

$$\frac{dx}{dt}\mathrm{S}.m=\mathrm{S}.\Phi\cos.\alpha\,,\ \frac{dy}{dt}\mathrm{S}.m=\mathrm{S}.\Phi\cos.\beta\,,\ \frac{dz}{dt}\mathrm{S}.m=\mathrm{S}.\Phi\cos.\gamma\,;$$

d'où il suit que le centre de gravité prend la vitesse qui aurait lieu si toute la masse du système était concentrée dans ce point, et si toutes les impulsions y étaient appliquées.

Il restera de plus, après avoir posé les trois équations précédentes, l'équation

$$\mathrm{S}.m\left(\frac{d\xi}{dt}\delta\xi+\frac{d\eta}{dt}\delta\eta+\frac{d\zeta}{dt}\delta\zeta\right)=\mathrm{S}.\Phi(\delta\xi\cos.\alpha+\delta\eta\cos.\beta+\delta\zeta\cos.\gamma),$$

à laquelle doivent satisfaire les vitesses relatives $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ imprimées aux points du système par rapport au centre de gravité.

Mouvement de rotation. Principe des aires.

329. Reprenons l'équation générale citée n° 324 :

$$\mathrm{S}.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{dz^2}{dt^2}\delta z\right)=\mathrm{S}(\mathrm{X}\delta x+\mathrm{Y}\delta y+\mathrm{Z}\delta z),$$

dans laquelle x, y, z représentent les coordonnées rectangulaires du point du système dont la masse est m, mesurées à la fin du temps t, à partir d'une origine fixe. On peut attribuer aux variations δx, δy, δz toutes les valeurs possibles compatibles avec les conditions de la liaison des parties du système. Supposons que ce système se meuve librement dans l'espace; quel qu'il soit, on ne violera jamais les conditions dont il s'agit en admettant qu'il tourne, sans changer sa figure actuelle, autour

d'un point fixe quelconque. Supposant donc les valeurs de δx, δy, δz données par un mouvement de cette nature, prenant l'origine des coordonnées pour le point fixe de rotation, et désignant par $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\chi$ les angles infiniment petits décrits respectivement autour des axes des x, des y et des z, on aura, comme on l'a vu n° 249,

$$\delta x = y\delta\chi - z\delta\omega,\quad \delta y = z\delta\varphi - x\delta\chi,\quad \delta z = x\delta\omega - y\delta\varphi.$$

En substituant ces expressions dans l'équation précédente, et égalant séparément à zéro les termes affectés des variations $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\chi$ dont les valeurs sont communes à tous les points du système et entièrement arbitraires, on trouvera les équations

$$\mathrm{S}.m\frac{yd^2x - xd^2y}{dt^2} = \mathrm{S}(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x),$$

$$\mathrm{S}.m\frac{xd^2z - zd^2x}{dt^2} = \mathrm{S}(\mathrm{Z}x - \mathrm{X}z),$$

$$\mathrm{S}.m\frac{zd^2y - yd^2z}{dt^2} = \mathrm{S}(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y).$$

Et si l'on observe que $yd^2x - xd^2y$, $xd^2z - zd^2x$, $zd^2y - yd^2z$ sont respectivement les différentielles des quantités $ydx - xdy$, $xdz - zdx$, $zdy - ydz$, on voit que ces équations peuvent s'écrire

$$\mathrm{S}.m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}y - \frac{dy}{dt}x\right) = \mathrm{S}(\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x),$$

$$\mathrm{S}.m\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}x - \frac{dx}{dt}z\right) = \mathrm{S}(\mathrm{Z}x - \mathrm{X}z),$$

$$\mathrm{S}.m\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}z - \frac{dz}{dt}y\right) = \mathrm{S}(\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y).$$

Les termes des seconds membres représentent les moments des forces appliquées aux points du système pris

respectivement par rapport aux axes des z, des y et des x. Les termes du premier membre représentent les coefficients différentiels, pris par rapport au temps, des moments relatifs aux mêmes axes des quantités de mouvement $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ dont les points du système sont animés à la fin du temps t, dans le sens des coordonnées x, y, z. Nous remarquerons encore, comme dans le n° 325, que les forces provenant des actions intérieures qui s'exercent entre les différents points du système n'entrent pas dans les seconds membres des équations précédentes, où elles ne donneraient que des termes qui se détruiraient réciproquement.

330. Considérons les cas où les seconds membres des équations précédentes seraient nuls. Cette circonstance aura lieu 1° lorsqu'aucune force ne sera appliquée extérieurement au système ; 2° lorsque les forces appliquées extérieurement aux divers points matériels seront constamment dirigées vers l'origine des coordonnées. On aura alors

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}y-\frac{dy}{dt}z\right)=N,$$

$$S.m\left(\frac{dz}{dt}x-\frac{dx}{dt}z\right)=M,$$

$$S.m\left(\frac{dy}{dt}z-\frac{dz}{dt}y\right)=L,$$

N, M, L désignant des constantes ; d'où l'on voit que si, à une époque quelconque du système, on veut composer les quantités de mouvement dont les points matériels sont animés, conformément à ce qu'on a vu n° 54, on trouvera toujours, pour les moments des trois couples

composants situés sur chacun des plans coordonnés les mêmes valeurs N, M, L. Le moment du couple résultant, représenté par

$$\sqrt{N^2+M^2+L^2},$$

conservera donc aussi une valeur constante, et le plan de ce couple formera toujours avec les plans fixes des xy, des xz et des yz des angles invariables dont les cosinus seront respectivement

$$\frac{N}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},\ \frac{M}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},\ \frac{L}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}}.$$

Ces propriétés sont analogues à celles qui ont été exposées n° 314. Dans tout système libre qui n'est sollicité par aucune force extérieure, le couple résultant des quantités de mouvement des parties du système relatif à une origine fixe quelconque est constant en grandeur et en direction.

Ajoutons que s'il existe dans le système un point fixe, la proposition qui vient d'être énoncée subsistera encore, mais seulement en supposant l'origine des coordonnées placée dans le point fixe. Nous admettons alors que le système n'est sollicité par aucune force extérieure, ou que les forces qui le sollicitent sont toutes dirigées vers le point fixe.

331. Le système étant toujours supposé se mouvoir librement dans l'espace, l'équation qui est posée à la fin du n° 325 se réduit à

$$S.m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right)=S(X\delta\xi+Y\delta\eta+Z\delta z).$$

On peut lui appliquer la transformation employée dans le n° 329. ξ, η, ζ sont les coordonnées du point du système dont la masse est m, mesurées à la fin du temps t, à partir du centre de gravité, sur trois axes rectangulaires parallèles aux axes fixes des x, des y et des z. Quel que soit le système proposé, on ne violera pas les conditions de la liaison de ses parties, en prenant pour les valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, celles qui résulteraient d'un mouvement dans lequel le système tournerait sans changer sa figure actuelle, comme un corps solide, autour de son centre de gravité. On déduira donc de l'équation précédente les trois équations

$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dt}\eta-\frac{d\eta}{dt}\zeta\right)=S(X\eta-Y\xi),$$
$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dt}\xi-\frac{d\xi}{dt}\zeta\right)=S(Z\xi-X\zeta),$$
$$S.m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dt}\zeta-\frac{d\zeta}{dt}\eta\right)=S(Y\zeta-Z\eta).$$

Les seconds membres de ces équations sont nuls, 1° lorsque le système n'est sollicité par aucune force extérieure ; 2° lorsque la force qui sollicite le point m est dirigée vers le centre de gravité. Dans l'un et l'autre cas, on obtiendra, en intégrant, les trois équations

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\eta-\frac{d\eta}{dt}\xi\right)=\nu,$$
$$S.m\left(\frac{dz}{dt}\xi-\frac{d\xi}{dt}\zeta\right)=\mu,$$
$$S.m\left(\frac{d\eta}{dt}\zeta-\frac{dz}{dt}\eta\right)=\lambda,$$

ν, μ, λ, désignant des constantes. Elles expriment que si l'on forme à un instant quelconque les trois couples composants résultant de la composition des quantités de mouvement relatives $m\frac{d\xi}{dt}$, $m\frac{d\eta}{dt}$, $m\frac{d\zeta}{dt}$ des points du système par rapport au centre de gravité, ce centre étant pris pour origine, on trouvera toujours pour les moments de ces couples les mêmes valeurs ν, μ, λ. Donc le couple résultant donné par ces quantités de mouvement aura aussi toujours le même moment exprimé par

$$\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2};$$

et le plan de ce couple formera constamment avec les plans des $\xi\eta$, des $\xi\zeta$ et des $\eta\zeta$, ou bien avec les plans fixes des xy, des xz et des yz, des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{\nu}{\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2}}, \quad \frac{\mu}{\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2}}, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{\nu^2+\mu^2+\lambda^2}}.$$

Ces résultats complètent ce qui a été dit dans le n° 327. On voit que pour un système libre, qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure ou dans lequel les forces sont dirigées vers le centre de gravité, les quantités de mouvement des parties du système relatives à ce centre, donnent toujours un couple résultant dont le moment est constant et dont le plan demeure parallèle à sa position initiale.

332. Les propositions qui viennent d'être énoncées constituent ce que quelques géomètres appellent la conservation du mouvement de rotation. Mais on peut aussi considérer ces mêmes propositions sous un autre point de vue. Reprenons les équations du n° 330,

$$S.m(ydx - xdy) = Ndt,$$
$$S.m(xdz - zdx) = Mdt,$$
$$S.m(zdy - ydz) = Ldt,$$

et concevons un rayon vecteur dirigé de l'origine des coordonnées au point du système dont la masse est m. Les quantités $ydx - xdy$, $xdz - zdx$, $zdy - ydz$ représentent respectivement le double des aires infiniment petites, décrites dans le temps dt par les projections de ce rayon vecteur sur les trois plans des xy, des xz et des yz. Donc ces trois équations expriment que les sommes de ces aires multipliées par les masses m croissent toujours proportionnellement au temps. D'où l'on peut conclure que si l'on forme à une époque quelconque du mouvement d'un système la somme des produits des masses de chaque point matériel par les aires décrites dans un temps donné sur un plan quelconque par les projections de leurs rayons vecteurs, on trouvera toujours pour cette somme une valeur constante.

Ce résultat s'énonce plus simplement en concevant les masses du système composées de divers nombres de parties égales entre elles, et admettant que l'on ait mené de l'origine fixe des coordonnées un rayon vecteur à chacune de ces parties. On pourra dire alors que la somme des aires décrites dans un temps donné par les projections des rayons vecteurs sur un plan quelconque, doit conserver toujours une valeur constante.

On reconnaît d'ailleurs que les aires décrites dans un temps quelconque t sur les trois plans coordonnés, exprimées par Nt, Mt, Lt, sont proportionnelles aux moments des trois couples composants des quantités de

mouvement des points matériels, couples dont il a été question dans le n° 330. De plus il existe entre une aire, décrite par un rayon vecteur dans un plan quelconque, et la projection de cette aire sur un autre plan, le même rapport qu'entre le moment d'un couple agissant dans le premier plan et le moment de ce même couple décomposé dans le sens du second plan. On doit donc conclure de ce qui précède 1° que la somme des aires décrites dans le temps t sur le plan du couple résultant, c'est-à-dire sur le plan qui forme avec le plan des xy, xz, yz des angles ayant pour cosinus

$$\frac{N}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},\quad \frac{M}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},\quad \frac{L}{\sqrt{N^2+M^2+L^2}},$$

est exprimée par

$$t\sqrt{N^2+M^2+L^2};$$

2° que la somme des aires décrites dans le temps t sur tout autre plan formant avec celui-ci un angle θ, est exprimée par

$$t\sqrt{N^2+M^2+L^2}.\cos.\theta,$$

quantité plus petite que la précédente.

Ainsi dans le cas d'un système libre, non sollicité par des forces extérieures, le mouvement s'opère toujours de telle manière que la somme des aires décrites dans un temps donné, sur un plan quelconque, par les projections des rayons vecteurs émanant d'un centre fixe pris arbitrairement, est constante. Il existe, pour chaque centre fixe, un plan à l'égard duquel la valeur de cette somme est plus grande que pour tout autre

plan mené par le même point. Ce *plan du maximum des aires* conserve une direction déterminée qui ne varie pas avec le temps.

Ces propriétés ont également lieu lorsque le système est soumis à l'action de forces extérieures, constamment dirigées vers le point fixe dont partent les rayons vecteurs.

333. Les résultats présentés dans le n° 331 donnent lieu à des propositions analogues. Il faut concevoir qu'un plan quelconque passant par le centre de gravité du système, se meut parallèlement à lui-même du même mouvement que ce centre de gravité. Cela posé, on conclura évidemment de ces résultats que quel que soit le mouvement d'un système libre qui n'est soumis à l'action d'aucune force extérieure, ou seulement à l'action de forces extérieures dont la résultante passe constamment par le centre de gravité, 1° la somme des aires décrites dans un temps donné sur le plan dont il s'agit par les projections des rayons vecteurs émanant du centre de gravité est constante; 2° que le plan sur lequel les aires décrites forment la plus grande somme se déplace en suivant le mouvement du centre de gravité sans cesser d'être parallèle à sa position initiale.

Ces propriétés remarquables sont connues sous le nom de *Principe des aires*. Le plan du maximum des aires est désigné, d'après Laplace, par le nom de plan invariable. La considération de ce plan, qui est importante dans les études relatives au système du monde, facilite les recherches analytiques.

334. Considérons maintenant, comme dans le n° 328,

l'effet d'une impulsion instantanée. On pourra substituer dans l'équation

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)=S.\phi(\delta x.\cos.\alpha+\delta y.\cos.\beta+\delta z.\cos.\gamma),$$

de ce numéro, les valeurs de δy, δx, δz qui ont été employées dans le n° 329; ce qui conduira aux trois équations distinctes

$$S.m\left(\frac{dx}{dt}y-\frac{dy}{dt}x\right)=S.\phi(y\cos.\alpha-x\cos.\beta),$$

$$S.m\left(\frac{dz}{dt}x-\frac{dx}{dt}z\right)=S.\phi(x\cos.\gamma-z\cos.\alpha),$$

$$S.m\left(\frac{dy}{dt}z-\frac{dz}{dt}y\right)=S.\phi(z\cos.\beta-y\cos.\gamma),$$

qui doivent subsister entre les quantités de mouvement imprimées et les vitesses initiales que ces impulsions produisent. En comparant ces équations à celles du n° 330, on voit que dans le cas d'un système libre les premiers membres conserveront des valeurs invariables qui ont été désignées par N, M, L. Ainsi ces constantes représentent, par rapport aux axes des z, des y et des x, les moments des impulsions initiales auxquelles est dû le mouvement du système.

335. On peut appliquer une transformation analogue à l'équation

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\delta\xi+\frac{d\eta}{dt}\delta\eta+\frac{d\zeta}{dt}d\zeta\right)=S.\phi(\delta\xi.\cos.\alpha+\delta\eta.\cos.\beta+\delta\zeta.\cos.\gamma),$$

donnée à la fin du n° 328. Elle conduira aux trois équations

$$S.m\left(\frac{d\xi}{dt}\eta - \frac{d\eta}{dt}\xi\right) = S.\Phi(\eta\cos.\alpha - \xi\cos.\beta),$$

$$S.m\left(\frac{d\zeta}{dt}\xi - \frac{d\xi}{dt}\zeta\right) = S.\Phi(\xi\cos.\gamma - \zeta\cos.\alpha),$$

$$S.m\left(\frac{d\eta}{dt}\zeta - \frac{d\zeta}{dt}\eta\right) = S.\Phi(\zeta\cos.\beta - \eta\cos.\gamma),$$

dont dépendent les vitesses initiales des parties du système rapportées à leur centre de gravité. D'après le n° 331, les premiers membres conserveront pendant toute la durée du mouvement, dans le cas d'un système libre, des valeurs constantes qui ont été représentées par ν, μ, λ. Ces quantités expriment donc, relativement aux axes menés par le centre de gravité du système, les moments des impulsions initiales par lesquelles le mouvement a été produit.

Principe des forces vives.

336. En admettant que les conditions de la liaison des points matériels ne contiennent pas le temps dans leur expression analytique, il sera permis de remplacer dans l'équation du n° 324,

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = S.(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

les variations δx, δy, δz par les différentielles dx, dy, dz; ce qui revient à prendre pour le déplacement dont dépendraient les valeurs de ces variations, le mouvement même qu'affecte le système dans l'élément du temps qui suit l'instant où on le considère. L'équation précédente devient alors

$$S.m\frac{dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z}{dt^2} = S.(Xdx + Ydy + Zdz),$$

et donne en intégrant par rapport au temps,

$$S.m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}=2S.\int(Xdx+Ydy+Zdz)+const.,$$

qui peut s'écrire, en désignant par v, à la fin du temps t, la vitesse du point matériel dont la masse est m,

$$S.mv^2=2S.\int(Xdx+Ydy+Zdz)+const.$$

Si l'on adopte les dénominations indiquées n° 114, on exprimera ce résultat en disant que dans un temps donné, l'accroissement de la somme des forces vives des points du système est toujours numériquement égale au double de la somme des quantités d'action qui ont été produites dans le même temps par toutes les forces agissant sur ces points.

337. Lorsque la quantité $S(Xdx+Ydy+Zdz)$, est la différentielle exacte d'une certaine fonction Π des trois variables x, y, z, en sorte que $S(Xdx+Ydy+Zdz)=d\Pi$, l'équation précédente devient

$$S.mv^2-S.mv_0^2=2(\Pi-\Pi_0),$$

v_0 et Π_0 représentant les valeurs de v et Π qui ont lieu dans la position initiale du système. La valeur de la force vive dépend uniquement de la fonction Π, de l'état initial du système, et des positions de ses parties à la fin du temps t.

La fonction $S(Xdx+Ydy+Zdz)$ est une différentielle exacte de x, y, z lorsque les forces agissant sur les points matériels sont dirigées vers des centres fixes, et sont des fonctions des distances des points matériels à ces centres. Elle l'est encore lorsque ces forces proviennent des actions intérieures qui s'exercent entre les

différents points du système, et sont des fonctions des distances de ces points. Soient en effet, dans le premier cas, a, b, c les coordonnées d'un centre fixe dont émane la force R agissant sur le point m dont les coordonnées sont x, y, z à la fin du temps t. Désignant par r la distance du point m au centre fixe, on aura $r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$; et si la force R tend à éloigner le point m de ce centre, l'expression des trois composantes X, Y, Z de cette force sera

$$X=R\frac{x-a}{r},\ Y=R\frac{y-b}{r},\ Z=R\frac{z-c}{r}.$$

Le terme relatif à la force R dans la somme dont il s'agit devient donc ici

$$R\left(\frac{x-a}{r}dx+\frac{y-b}{r}dy+\frac{z-c}{r}dz\right).$$

Or

$$\frac{x-a}{r}=\frac{dr}{dx},\ \frac{y-b}{r}=\frac{dr}{dy},\ \frac{z-c}{r}=\frac{dr}{dz}.$$

Donc ce terme est une différentielle exacte, puisque R est supposée une fonction de r. Dans le second cas, désignons toujours par R la force agissant entre deux points m et m' dont les coordonnées à la fin du temps t, sont x, y, z, pour le premier et x', y', z' pour le second. La distance r de ces deux points sera exprimée par $\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$. Admettons que la force R tende à écarter les deux points l'un de l'autre. Les trois composantes de l'effort qu'elle exerce sur le point m seront

$$X=R.\frac{x-x'}{r},\ Y=R.\frac{y-y'}{r},\ Z=R.\frac{z-z'}{r};$$

et les trois composantes de l'effort qu'elle exerce sur le point m', seront

$$X'=-R\frac{x-x'}{r},\ Y'=-R\frac{y-y'}{r},\ Z'=-R\frac{z-z'}{r}.$$

La force dont il s'agit donnera donc le terme

$$\frac{R}{r}\Big[(x-x')(dx-dx')+(y-y')(dy-dy')+(z-z')(dz-dz')\Big],$$

qui revient encore à Rdr, puisque

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

et qui est par conséquent une différentielle exacte, lorsque R est supposée une fonction de r.

338. Lorsqu'aucune force n'agit sur les points du système, l'équation précédente se réduit à

$$S.mv^2=const.$$

La somme des forces vives des points matériels ne varie pas avec le temps, et conserve constamment sa valeur initiale.

Les propriétés précédentes sont connues sous le nom de conservation des forces vives. Il importe de reconnaître exactement dans quel cas elles subsistent ou non.

1° Si le système est constitué de la manière indiquée dans le n° 230, c'est-à-dire s'il est formé de points matériels assujettis par des verges ou des fils parfaitement rigides et inextensibles, dont la masse est supposée nulle, les propositions précédentes subsistent toujours ; lors même que quelques-uns des points matériels seraient entièrement fixes, ou assujettis à se mouvoir sur des lignes ou

des surfaces fixes données. Et de plus, les quantités X, Y, Z ne comprennent alors que les forces appliquées extérieurement au système; car si l'on voulait y comprendre les actions intérieures résultant des tensions ou contractions des liens du système, ou même les efforts exercés sur les obstacles extérieurs fixes, on reconnaîtrait, par les n°s 239 et 240, que les moments virtuels des efforts dont il s'agit donneraient une somme nulle.

2° Si le système est formé de points matériels réunis par des verges ou des fils extensibles et élastiques, dont la masse est toujours supposée nulle, les propositions précédentes peuvent être admises; mais alors il est nécessaire de comprendre dans les quantités X, Y, Z, non-seulement les forces appliquées extérieurement au système, mais encore les actions intérieures qui s'exercent entre les points matériels assujettis entre eux par des liens élastiques. En effet, comme la nature de ces liens permet alors que la distance des deux points matériels entre lesquels une telle action s'exerce, varie lors des changements de figure du système, on ne peut appliquer ici ce qui a été dit n° 239, ni admettre en général la destruction mutuelle des deux moments virtuels donnés par l'action dont il s'agit. Dans un cas de cette nature, si les actions exercées entre deux quelconques des points matériels dépendent uniquement de la distance actuelle de ces points, les termes relatifs à ces actions qui devront être introduits dans la formule $Xdx+Ydy+Zdz$ formeront, comme on l'a vu ci-dessus, une différentielle exacte des variables x, y, z.

3° La remarque précédente s'applique évidemment au cas d'un système tel que le système planétaire, formé

par des corps qui se meuvent indépendamment les uns des autres, et qui agissent les uns sur les autres sans qu'il paraisse exister entre eux aucun lien matériel. On doit comprendre les actions mutuelles de ces corps dans les quantités désignées par X, Y, Z. Les termes relatifs à ces actions mutuelles formeront une différentielle exacte de x, y, z, si ces actions sont exprimées uniquement en fonction des distances des points matériels.

4° S'il survient un choc entre les parties du système, la valeur actuelle de la somme des forces vives est changée par le seul effet de ce choc; et les propositions précédentes ne peuvent plus en général être appliquées. En effet, un choc introduit dans le système de nouvelles forces intérieures agissant entre des corps qu'il faut regarder comme unis par des liens compressibles et élastiques; en sorte que l'on devrait comprendre dans le second membre de l'équation du n° 336 les quantités d'action développées par ces forces pendant la durée du choc, pour que cette équation ne cessât point de donner exactement la valeur de la force vive du système.

On voit, par ce qui précède, que le principe de la conservation des forces vives n'est pas aussi général que les propriétés qui ont été exposées précédemment, et qui se rapportent à la conservation des quantités de mouvement, en ce sens que ces dernières propriétés sont tout à fait indépendantes des réactions intérieures des parties du système, ce qui n'a pas toujours lieu pour la conservation des forces vives.

339. Considérons plus particulièrement l'effet d'un choc entre les parties d'un système de corps en mouvement. Il sera nécessaire, d'après ce qui a été dit ci-

dessus, de comprendre, pendant la durée du choc, dans le second membre de l'équation

$$S.m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z),$$

les moments virtuels des efforts intérieurs qui ont été produits par ce choc. Soit en général N la valeur de l'effort exercé à la fin du temps t entre deux corps du système que le choc a mis en contact, et n la distance du point de contact à un point fixe pris sur la direction de la normale commune aux surfaces des deux corps menée par ce point : $N\delta n$ représentera le moment virtuel de l'effort N. Si l'on désigne d'ailleurs, pour abréger, par u, v, w, les vitesses du point matériel dont la masse est m, qui ont lieu respectivement à la fin du temps t, dans le sens des x, des y et des z, on devra écrire

$$S.m\left(\frac{du}{dt}\delta x+\frac{dv}{dt}\delta y+\frac{dw}{dt}\delta z\right)=S.(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)+S.n\delta n,$$

équation qui subsistera pendant toute la durée du choc.

Remarquons, comme on l'a fait dans le n° 258, que la durée d'un choc étant toujours fort petite, et les positions respectives des parties du système ne subissant pendant cette durée que des changements très-petits, il n'y aura que très-peu d'erreur à considérer pendant le choc, dans l'équation précédente, les variations δx, δy, δz, δn, comme constantes par rapport au temps t. En admettant cette hypothèse, et intégrant par rapport au temps, il viendra

$$\begin{aligned}&S.m[(u-U)\delta x+(v-V)\delta y+(w-W)\delta z]\\&=S.\int dt(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)+S.\int dt.N\delta n,\end{aligned}$$

en désignant par U, V, W les valeurs des vitesses u, v, w, qui ont lieu à l'instant où le choc commence, et prenant les intégrales désignées par $\int$ depuis cet instant jusqu'à la fin du temps t. Cette équation doit également subsister pendant toute la durée du choc.

Nous observerons maintenant 1° que les forces désignées par X, Y, Z, qui représentent les actions continues exercées sur le système auront généralement, dans les cas naturels, des valeurs très-petites par rapport à celles des efforts désignés par N qui sont développés par l'effet du choc, et par conséquent que le premier terme du second membre de l'équation précédente peut être négligé par rapport au second terme; 2° que la valeur de ce second terme $S\int dt.N\delta n$ peut toujours être supposée nulle; car il suffit pour cela d'admettre que dans le déplacement du système auquel répondent les valeurs des variations δx, δy, δz, δn, les surfaces en contact des corps qui se choquent ne se séparent point, mais glissent seulement les unes sur les autres, puisqu'alors les forces donneront toujours des moments virtuels égaux deux à deux et de signes contraires. On peut donc écrire, au lieu de l'équation précédente,

$$S.m[(u-U)\delta x+(v-V)\delta y+(w-W)\delta z]=0.$$

340. Si l'on veut maintenant distinguer les divers résultats qui auront lieu suivant la constitution physique des corps, conformément aux notions présentées dans les n°s 271 et 272, on supposera d'abord qu'il s'agisse de corps non élastiques, c'est-à-dire tels que le choc est fini

quand les impressions sont parvenues à leur maximum, et que les surfaces en contact des deux corps ne se séparent point à l'instant de la fin du choc, mais peuvent seulement glisser les unes sur les autres. Dans ce cas, considérant l'instant de la fin du choc, on pourra prendre pour les variations δx, δy, δz dans l'équation précédente, les espaces dx, dy, dz réellement décrits par les points matériels dans l'élément du temps dt qui suit l'instant où le choc finit, ce qui revient à remplacer δx, δy, δz par udt, vdt, wdt; car les espaces udt, vdt, wdt satisfont alors à ces deux conditions de pouvoir être pris pour les valeurs de δx, δy, δz supposées constantes pendant toute la durée du choc, et de rendre nulle la somme des moments virtuels $N\delta n$. L'équation dont il s'agit donne alors

$$S.m[u^2+v^2+w^2-(Uu+Vv+Ww)]=0,$$

u, v, w représentant les vitesses qui ont lieu à la fin du choc.

Considérons l'expression

$$S.m[U^2+V^2+W^2-(u^2+v^2+w^2)],$$

qui représente la différence entre les sommes des forces vives des parties de système qui ont lieu au commencement et à la fin du choc. Si l'on y ajoute le premier membre de l'équation précédente multiplié par 2, on n'en changera pas la valeur; mais cette expression se mettra sous la forme

$$S.m[(U-u)^2+(V-v)^2+(W-w)^2];$$

d'où l'on conclut que la force vive perdue par l'effet d'un choc entre corps non élastiques est égale à la force

vive qui serait due aux vitesses perdues respectivement par chacun des corps du système. Cette proposition est connue sous le nom de théorème de Carnot. On voit d'ailleurs qu'un choc entre les corps d'un système a toujours pour effet d'en diminuer la force vive.

341. On démontre également la proposition dont il s'agit lorsque l'on considère le choc entre des corps parfaitement durs de la manière qui a été indiquée n° 275. En effet, d'après le n° 258, le mouvement du système est assujetti à la condition que les quantités de mouvement finies, perdues instantanément par l'effet du choc, qui sont représentées respectivement par $m(U-u)$, $m(V-v)$, $m(W-w)$, fassent équilibre aux quantités de mouvement imprimées par les forces qui agissent sur le système, prises en sens contraire. Or les forces développées par le choc, qui ne sont autre chose que les pressions exercées l'un sur l'autre par les corps que le choc a mis en contact, pressions qui ont été désignées par N, sont toujours égales deux à deux, et dirigées en sens opposés suivant la même ligne droite. Elles se détruisent réciproquement, et l'équilibre dont on vient de parler est exprimé simplement par l'équation

$$S.m[(U-u)\delta x+m(V-v)\delta y+m(W-w)\delta z]=0,$$

c'est-à-dire l'équation même qui a été employée ci-dessus. On doit ici faire entièrement abstraction des forces qui agissent d'une manière continue sur le système, parce que, dans un temps infiniment petit, ces forces ne donnent que des quantités de mouvement infiniment petites.

342. Admettons en second lieu, comme dans le n° 272, que le choc s'opère entre des corps parfaitement élastiques, et de plus, qu'à l'instant où le choc finit, les impressions formées dans ces corps par l'effet du choc ont entièrement disparu. Il n'est plus permis ici de faire à l'égard des quantités δx, δy, δz, la supposition qui a été faite dans le n° 295, parce que les surfaces des corps se séparant dès que finit le choc, les points qui étaient en contact n'ont plus, après le choc, les mêmes vitesses dans le sens de la normale commune aux deux surfaces. Mais les intégrales $\int dt.N\delta n$ qui entrent dans l'équation du n° 339, en les supposant prises depuis le commencement jusqu'à la fin du choc, auront alors des valeurs nulles; parce que les variations δn sont supposées constantes par rapport au temps, et que ces intégrales se trouvent formées de deux parties égales et de signes contraires. D'où l'on conclut que dans les cas dont il s'agit, la somme des forces vives des parties du système reprendra après le choc la même valeur qu'elle avait auparavant le choc. Cette proposition ne s'applique point à tous les cas où les chocs ont lieu entre corps parfaitement élastiques, mais seulement aux cas très-particuliers où les corps sont revenus complétement, à la fin du choc, à leur figure naturelle.

343. Nous considérerons encore le cas où il surviendrait, dans un système de corps en mouvement, une explosion instantanée, c'est-à-dire que nous admettrons qu'il s'établit subitement pendant un temps très-court, entre deux ou plusieurs corps du système, de très-grands efforts, tendant à écarter ces corps les uns

des autres. Nous aurons alors, comme dans le n° 339, pendant la durée de l'explosion, l'équation

$$S.m[(u-U)\delta x+(v-V)\delta y+(w-W)\delta z]=0,$$

pourvu que l'on attribue aux variations δx, δy, δz, des valeurs conformes à la condition énoncée à la fin de ce numéro. Or on satisfait évidemment à cette condition en remplaçant δx, δy, δz, par les espaces Udt, Vdt, Wdt parcourus par les points matériels en vertu des vitesses qui avaient lieu à l'instant où l'explosion a commencé. Ainsi nous avons ici

$$S.m[Uu+Vv+Ww-(U^2+V^2+W^2)]=0,$$

et l'on en déduit, comme dans le n° 295,

$$\begin{aligned}&S.m[u^2+v^2+w^2-(U^2+V^2+W^2)]\\&=S.m[(u-U)^2+(v-V)^2+(w-W)^2],\end{aligned}$$

d'où il suit que la force vive acquise par le système, à la suite de l'explosion, estégale à la force vive qui serait due aux vitesses acquises respectivement par chacun des corps du système. L'effet d'une explosion est toujours d'augmenter la force vive actuelle du système.

344. On peut, en admettant la restriction qui a été énoncée n° 336, c'est-à-dire en supposant les conditions du système indépendantes du temps, remplacer $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ par $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$, dans l'équation qui se trouve à la fin du n° 325, ce qui donnera

$$S.m\frac{d\xi d^2\xi+d\eta d^2\eta+d\zeta d^2\zeta}{dt}=S(Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta);$$

et en intégrant par rapport au temps

$$S.m\frac{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}{dt^2}=2S\int(Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta)+const.$$

Ainsi le principe des forces vives subsiste également lorsque l'on considère les mouvements des points matériels relatifs à leur centre de gravité.

345. Nous terminerons par une remarque relative aux notions qui ont été présentées dans les n°s 252 et 253. Reprenons l'équation trouvée n° 336

$$Smv^2 - Smv'^2_0 = 2(\Pi - \Pi_0).$$

On en conclut que la somme des forces vives du système aura ses valeurs maxima ou minima en même temps que la fonction Π; et comme la condition du maximum ou du minimum de cette dernière fonction est $d\Pi = 0$, c'est-à-dire

$$S(Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

ou bien

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0,$$

il en résulte cette conséquence remarquab, leque dans le mouvement d'un système, la force vive est la plus grande ou la plus petite possible lorsque ce système se trouve dans des positions, ou présente des figures telles, que les forces qui lui sont appliquées se feraient mutuellement équilibre. Ainsi la recherche des positions du système, dans lesquelles il y a équilibre entre des forces données, répond à la recherche des positions où la force vive du système, mû par l'action de ces mêmes forces, est un maximum ou un minimum.

On démontre de plus, 1° que l'équilibre est stable (c'est-à-dire que le système est dans une situation telle qu'il y revient de lui-même par la seule action des forces qui lui sont appliquées, quand on lui a fait subir un très-petit déplacement), lorsque la valeur de la force

vive est un maximum; 2° que l'équilibre est instable, lorsque la valeur de la force vive est un minimum. Cette proposition est une conséquence immédiate de la démonstration du principe des vitesses virtuelles qui a été rapportée dans le n° 237. Désignons en effet par p, p', p'', etc., les distances qui existent respectivement entre les moufles fixes et mobiles A et B, A′ et B′, A″ et B″, etc. La somme des longueurs des cordons qui réunissent ces moufles les unes aux autres sera évidemment $Pp + P'p' + P''p'' +$ etc. Soit de plus c la longueur constante des parties du fil qui vont d'une moufle fixe à une autre en passant sur des poulies de renvoi également fixes; et enfin désignons par s la partie du fil qui est placée au delà de la dernière poulie de renvoi, et à l'extrémité de laquelle le poids est attaché. La longueur totale du fil, qui est constante, sera représentée par

$$Pp+P'p'+P''p''+\text{etc.},+c+s\,;$$

et si l'on suppose les quantités P, P′, P″, etc., indépendantes de p, p', p'', etc.; ce qui est permis lorsque l'on ne considère qu'un déplacement très-petit du système, la quantité $Pp+P'p'+P''p''+$ etc., prise avec un signe contraire, reviendra à celle qui a été désignée ci-dessus par Π. Ainsi la longueur du fil est également exprimée par

$$-\Pi+c+s.$$

Or si la valeur de Π, et par conséquent celle de s, sont des maximums, un petit dérangement quelconque du système fera monter le poids; et comme ce poids tend toujours à descendre, le système reviendra de lui-même à sa position primitive. Si au contraire les valeurs de Π et de s sont des minimums, un dérangement semblable

fera descendre le poids, qui continuera alors à descendre, et le système s'écartera de plus en plus de la position où il se trouvait en équilibre.

346. La même proposition peut encore être démontrée de la manière suivante. Considérons le système dans la situation où les forces qui lui sont appliquées se font équilibre, et où la valeur de la fonction Π, que nous désignerons par Π_0, est un maximum ou un minimum. Admettons ensuite qu'on imprime à chaque point m une vitesse très-petite v_0, en sorte que le système commencera à se mouvoir avec une force vive initiale également très-petite, représentée par $S.mv_0^2$. Après un certain temps t la force vive du système sera donnée par l'équation

$$S.mv^2 = S.mv_0^2 + 2(\Pi - \Pi_0).$$

Mais si nous représentons les coordonnées x, y, z qui appartiennent au point m à la fin du temps t par $x_0+\xi$, $y_0+\eta$, $z_0+\zeta$, de même les coordonnées x', y', z' appartenant à un autre point m' du système à la fin du temps t par $x_0'+\xi'$, $y_0'+\eta'$, $z_0'+\zeta'$, et ainsi des autres ; nous pourrons développer, conformément à ce qu'on a vu dans l'article XIII des *Leçons d'Analyse*, la fonction Π en une série telle que

$$\Pi_0 + \varpi' + \varpi'' + \varpi''' + \text{etc.},$$

dans laquelle le terme ϖ' contiendra seulement les premières puissances des variables ξ, μ, ζ; ξ', μ', ζ'; etc. ; le terme ϖ'' contiendra les carrés et les produits deux à deux de ces mêmes variables ; le terme ϖ''' contiendra leurs troisièmes puissances et leurs produits trois à trois ; et ainsi de suite. Et si les valeurs x_0, y_0, z_0; x'_0, etc.,

rendent, comme on le suppose, la fonction Π un maximum ou un minimum, on aura, d'après les n°s 147 et suivants des *Leçons d'Analyse*, $\varpi'=0$, et l'équation précédente se réduira à

$$S.mv^2 = S.mv_0^2 + 2(\varpi'' + \varpi''' + \text{etc.}),$$

dans laquelle la quantité $2(\varpi'' + \varpi''' + \text{etc.})$ sera nécessairement négative dans le cas du maximum et positive dans le cas du minimum. Or, le premier membre $S.mv^2$ est toujours positif; donc, 1° dans le cas du maximum, la valeur absolue de $2(\varpi'' + \varpi''' + \text{etc.})$ ne pourra jamais surpasser $S.mv_0^2$ qui est supposée très-petite, ce qui entraîne la conséquence (ainsi qu'on peut le reconnaître) que les variables ξ, η, ζ; ξ', etc., ne peuvent prendre que des valeurs très-petites; 2° dans le cas du minimum, aucune condition ne limite la valeur de la quantité dont il s'agit, ni par conséquent les valeurs de ces variables. La recherche du mouvement du système montrerait effectivement que dans ce dernier cas les vitesses des points matériels tendent à augmenter de plus en plus.

Principe de la moindre action.

347. Considérons la quantité.

$$S.m\int ds.v,$$

qui se forme en prenant le produit de la masse de chaque point matériel par l'intégrale $\int ds.v$. Nous représentons par ds l'élément de la trajectoire décrite par le point dont la masse est m dans le temps dt, et par v la vitesse de ce même point à la fin du temps t. L'intégrale $\int ds.v$ est prise entre deux points donnés de la trajectoire qui ont des positions fixes dans l'espace, et par

lesquels le point matériel m est assujetti à passer. Entre ces deux points fixes la trajectoire décrite par ce point n'est pas déterminée d'avance; elle dépendra des conditions du système et des forces qui lui sont appliquées. Cela posé, le principe de la *moindre action* consiste en ce que, pour un système et des forces quelconques, les trajectoires décrites par les divers points matériels entre les limites fixes données seront toujours telles que la quantité $S.m\int ds.v$ sera un maximum ou un minimum (c'est-à-dire plus grande ou plus petite que pour toute autre trajectoire possible), les intégrales $\int ds.v$ étant prises entre ces mêmes limites.

Cette proposition convient seulement aux cas où les conditions du système sont indépendantes du temps, et où la fonction $S(Xdx+Ydy+Zdz)$ est une différentielle exacte d'une certaine fonction Π des variables x, y, z. Pour la démontrer, il suffira de faire voir que l'on aura toujours

$$\delta S.m\int ds.v=0.$$

En effet l'on a

$$\delta S.mds.v=S.m(v.\delta ds+ds.\delta v)=S.m\left(\frac{ds}{dt}\delta ds+\frac{1}{2}\,dt.\delta v^2\right).$$

Mais d'une part

$$\delta ds=\frac{dx.\delta dx+dy.\delta dy+dz.\delta dz}{ds};$$

et d'autre part, d'après le n° 336

$$\frac{1}{2}S.m\delta v^2=\delta\Pi=S(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=S.m\frac{d^2x\delta x+d^2y\delta y+d^2z\delta z}{dt^2};$$

donc, en substituant ces deux valeurs

$$\delta S.mds.v=S.md.\left(\frac{dx.\delta x+dy.\delta y+dz.\delta z}{dt}\right).$$

Intégrant maintenant par rapport à t, l'intégrale indéfinie du second membre sera $S.m\frac{dx.\delta x+dy.\delta y+dz.\delta z}{dt}$, quantité nulle aux deux limites, puisque les deux extrémités des trajectoires étant données, on a pour ces points $\delta x=0$, $\delta y=0$, $\delta z=0$. Ainsi l'on a entre ces limites

$$\delta S.m\int ds.v=0,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

348. L'équation précédente revient d'ailleurs à

$$\delta S.m\int dt.v^2=0,$$

en sorte que le principe dont il s'agit peut aussi s'exprimer en disant que l'intégrale, prise par rapport au temps, des forces vives du système qui ont lieu entre deux positions données, est toujours la plus grande ou la moindre possible.

XXIII. Calcul de l'effet des machines.

349. Les machines sont employées pour remplacer, dans les travaux des arts, l'action immédiate de l'homme ou des animaux. Calculer l'*effet* d'une machine, c'est estimer la quantité de travail que l'on peut opérer par son moyen dans des circonstances données.

Malgré la diversité que présentent les opérations auxquelles les machines sont appliquées, on reconnaît qu'elles ont toutes des éléments communs, au moyen desquels on peut les apprécier d'une manière générale et régulière. En effet, toutes les fois qu'il y a *un travail fait par une machine* (c'est-à-dire une opération

effectuée dont il résulte la production d'un objet utile ayant une valeur subsistante), il y a nécessairement *un effort exercé sur un point qui parcourt en même temps un espace dans le sens de cet effort*. La réunion de ces deux circonstances, effort exercé, et espace parcouru dans le sens de l'effort, est nécessaire pour constituer un travail utile auquel on puisse attribuer une valeur.

La vérité de ce principe est manifeste dans les appareils dont l'objet est d'élever des corps pesants, par exemple dans les machines qui servent à élever de l'eau. Elle ne l'est pas moins dans la plupart des autres machines, où l'on reconnaît facilement qu'au point où le travail s'effectue un effort est toujours exercé par une partie de l'appareil qui est mue dans le sens de cet effort.

350. En général, on distinguera dans les machines : 1° l'action du *moteur*, c'est-à-dire la cause qui a produit dans l'origine le mouvement des parties de l'appareil, qui entretient ce mouvement et empêche qu'il ne soit détruit par des causes opposées ; 2° l'action de la *résistance*, action qui résulte immédiatement du travail que la machine peut effectuer, et qui, s'exerçant dans un sens contraire à celui de l'action du moteur, tend continuellement à détruire le mouvement des parties de la machine.

On reconnaîtra de plus, conformément à ce qui a été dit dans le n° précédent, que l'action du moteur consiste en ce qu'un effort constant ou variable est exercé sur un certain point de la machine qui se meut dans le sens de cet effort ; et de même, que l'action de la résistance consiste en ce qu'un certain point de la

machine exerce sur un corps étranger un effort, et se meut dans le sens de cet effort. On pourra même, dans la plupart des cas, mettre ces circonstances en évidence, en remplaçant effectivement l'action du moteur par la descente verticale d'un poids égal à l'effort que ce moteur exerçait, et attaché à l'extrémité d'une corde tendue dans le sens de cet effort; et en remplaçant aussi l'action de la résistance par l'élévation verticale d'un poids.

351. Connaissant aïnsi la nature de l'action des moteurs sur les machines pour y produire et entretenir le mouvement et celle des machines sur les résistances pour effectuer l'opération à laquelle la machine est destinée, et sachant que ces actions peuvent être assimilées à la descente ou à l'élévation d'un corps pesant, on voit facilement à quoi se réduit leur évaluation. Il est visible en effet que l'action résultante de la descente d'un poids, ou le travail nécessaire pour élever un poids, sont d'autant plus grands que le poids est plus grand et que la hauteur est plus grande. Par conséquent, si l'on nomme

P,Q les efforts supposés constants, exercés respectivement dans une machine aux points d'application du moteur et de la résistance;

p,q les espaces parcourus respectivement dans un temps donné par ces points dans le sens des efforts P,Q;

l'action exercée par le moteur, et la quantité de travail ou l'effet produit par la machine dans le même temps, seront exprimés par les nombres Pp et Qq.

Dans le cas où les efforts P,Q ne sont point constants, on les considérera comme donnés en fonction des espaces p,q parcourus respectivement dans la direction de ces efforts : l'action exercée par le moteur et l'effet produit par la machine seront exprimés par les intégrales

$$\int P dp \quad \text{et} \quad \int Q dq,$$

prises entre les limites correspondant aux instants où commence et finit le travail.

On voit par là, et d'après les définitions données n° 144, que les *quantités d'action* exercées respectivement pendant le mouvement de la machine aux points d'application du moteur et de la résistance donnent l'évaluation numérique de l'action du moteur et du travail effectué par l'appareil. Ainsi, les nombres qui représentent l'action du moteur ou l'effet de la machine sont formés du produit d'un nombre d'unités de poids par un nombre d'unités linéaires. On peut regarder les nombres dont il s'agit comme composés d'unités dont chacune est le travail nécessaire pour élever l'unité de poids à l'unité de hauteur, c'est-à-dire, dans notre système de mesures, pour élever un poids d'un kilogramme à une hauteur d'un mètre.

352. Considérons maintenant une machine en mouvement. L'ensemble des corps dont elle est formée constitue un système auquel on peut appliquer les notions générales exposées dans les articles précédents. Ce système est soumis à l'action des forces extérieures, qui sont principalement l'effort exercé par le moteur dans le

sens du mouvement, et l'effort exercé par la résistance en sens contraire du mouvement. Il peut exister aussi d'autres actions extérieures, telles que la résistance des milieux dans lesquels les parties de la machine se meuvent. De plus, il se produit généralement des actions intérieures, auxquelles le mouvement même des parties de l'appareil donne naissance, et qui s'exercent toujours en sens contraires de ce mouvement. En prenant en considération toutes ces forces, on peut reconnaître d'une manière générale les conditions auxquelles la marche d'une machine est assujettie.

Conservons les dénominations du n° 351, et désignons de plus par

F l'effort qui doit être surmonté pour vaincre une des résistances produites par le mouvement de l'appareil ;

f l'espace parcouru à la fin du temps t dans la direction de l'effort F ;

m la masse d'un des points matériels dont les parties de la machine sont composées ;

v la vitesse de ce point à la fin du temps t ;

nous aurons, d'après le n° 336,

$$\frac{1}{2} S.mv^2 = \int P dp - S \int F df - \int Q dq + const. \ldots\ldots \text{(A)}$$

Le terme $S\int F df$ représente la somme de toutes les intégrales $\int F df$ qui sont données par les diverses résistances produites par le mouvement de la machine, et que l'action du moteur doit surmonter.

En différentiant par rapport au temps l'équation précédente ; elle devient

$$S.mvdv = Pdp - SFdf - Qdq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Ces relations donnent lieu aux remarques suivantes.

353. Dans les premiers instants où une machine est mise en mouvement, et où la vitesse de ses parties augmente progressivement, le second membre de l'équation (B) est nécessairement positif, l'action du moteur l'emportant sur celle des résistances. Mais il arrive toujours, par la nature de ces actions, que l'effort du moteur diminuant et l'effort de la résistance augmentant au contraire à mesure que les vitesses v augmentent, la valeur du second membre de l'équation (B) tend à devenir nulle. Lorsque cela a lieu, cette équation donne $dv=0$; et si les efforts désignés par P, Q et F conservent leurs valeurs actuelles, les vitesses des parties de l'appareil ne subissent plus aucune variation, et la machine se meut constamment d'un mouvement uniforme.

Cette uniformité dans le mouvement, qui est le résultat de l'invariabilité supposée des efforts P,Q,F à partir de l'instant où leurs valeurs ont satisfait à l'équation

$$Pdp - SFdf - Qdq = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

a effectivement lieu dans un grand nombre de cas. Elle s'établit ordinairement après un intervalle de temps très-court compté du moment où la machine a commencé à se mouvoir. On voit que dans les cas dont il s'agit, les efforts constants exercés par le moteur et la résistance ont des valeurs telles, que ces efforts se feraient mu-

tuellement équilibre sur la machine, conformément aux lois de la statique; et c'est d'après cette remarque que l'on établira la relation qui doit exister entre les actions respectives du moteur et de la résistance pour que le travail de la machine puisse s'effectuer. On reconnaît de plus que, dans un intervalle de temps quelconque, la quantité d'action produite par le moteur à son point d'application, est égale à la quantité d'action produite au point d'application de la résistance, augmentée des quantités d'action dues aux résistances intérieures; en sorte que si ces dernières résistances étaient nulles (ce qui est impossible), il y aurait égalité entre les quantités d'action produite par le moteur et consommée par la résistance.

354. Si les valeurs des efforts du moteur et des résistances ne sont point constantes, le mouvement de la machine n'est pas uniforme. Il présente alors des variations régulières et périodiques qui tiennent à ce que l'effort du moteur est alternativement plus grand ou plus petit qu'il ne devrait être pour faire équilibre à l'effort de la résistance. Quand l'effort du moteur est plus grand qu'il ne devrait être pour l'équilibre, le second membre de l'équation B du n° 352 est positif, et la vitesse des parties de l'appareil augmente avec le temps. L'inverse a lieu lorsque l'effort du moteur est au contraire plus petit qu'il ne devrait être pour l'équilibre. Le second membre de l'équation B est alors négatif, et la vitesse décroît avec le temps. La nature du mouvement consiste donc, dans ce cas, en ce que la vitesse croît et décroît alternativement en oscillant autour d'une valeur moyenne. Les maxima et minima de

la vitesse ont lieu dans les instants où $dv=0$, c'est-à-dire lorsque la condition exprimée par l'équation (C) subsiste, ou lorsque les efforts du moteur et de la résistance ont les valeurs convenables pour se faire réciproquement équilibre sur la machine. Les écarts de la vitesse, à partir de sa valeur moyenne, sont d'autant plus grands, tout étant égal d'ailleurs, que la masse et la vitesse actuelle des parties de la machine sont plus petites.

Si d'ailleurs le mouvement s'opère d'une manière régulière, les mêmes valeurs des efforts du moteur et des résistances, et les mêmes valeurs de la vitesse de chaque partie se reproduisent dans le cours de chacune des périodes entre lesquelles la durée du mouvement est partagée. Par conséquent la force vive des parties de la machine reprend, à la fin d'une de ces périodes, la même valeur qu'elle avait au commencement. D'où l'on peut conclure, par l'équation (A) du n° 352, que dans un intervalle de temps comprenant un nombre entier des périodes dont il s'agit, la quantité d'action produite par le moteur est toujours égale aux quantités d'action consommées par la résistance résultant du travail de la machine, et par les résistances intérieures produites par le mouvement même des parties de l'appareil.

Lorsque, comme on l'a supposé n° 353, le mouvement d'une machine est uniforme, la relation qui doit être établie entre le moteur et la résistance résulte de ce que leurs efforts doivent avoir les valeurs convenables pour qu'il y ait équilibre statique entre ces efforts. Lorsque, comme nous le supposons ici, le mouvement présente des variations périodiques, cette même relation doit résulter de l'égalité des quantités d'action produites

respectivement par la résistance dans le cours de chaque période. On posera donc l'équation

$$\int P dp = S \int F df + \int Q dq, \ldots\ldots\ldots \quad (D)$$

les intégrales $\int$ étant supposées prises pour un intervalle de temps au commencement et à la fin duquel les vitesses désignées par v ont les mêmes valeurs. Et cette équation devra être considérée comme exprimant une sorte d'*équilibre dynamique*, d'après lequel la grandeur de l'action du moteur qui exécuterait un travail donné pourrait toujours être déterminée.

355. La question qui se présente ordinairement dans le calcul d'une machine consiste à déterminer l'action du moteur qui est nécessaire pour produire un effet donné; ou bien l'effet qui sera produit par la machine lorsqu'on lui appliquera un moteur dont l'action sera donnée. On voit par les notions précédentes que cette question est toujours ramenée à distinguer les efforts exercés aux points d'application du moteur et de la résistance, et à savoir apprécier les forces intérieures, telles que les frottements et autres résistances de cette nature, que l'action du moteur doit surmonter. Ces forces étant évaluées, l'application des principes de statique et de dynamique exposés dans les articles précédents conduira toujours à la connaissance des relations cherchées, relations dont la nature a été indiquée dans les n°s 353 et 354. Nous ne pouvons d'ailleurs entrer ici dans les détails qui seraient nécessaires pour mettre à même d'apprécier dans divers cas les résistances intérieures, objet qui exige

une étude spéciale ; et nous ajouterons seulement une remarque relative au cas où il s'opérerait des chocs dans le mouvement de l'appareil.

On doit alors appliquer les notions présentées dans les n°s 339 et suivants ; et par conséquent l'altération produite dans le mouvement de l'appareil par l'effet d'un choc, doit être considérée comme dépendant de la nature physique des corps, et par conséquent comme inconnue, à moins d'une recherche spéciale fondée sur la définition mécanique de leur composition. Mais on regarde ordinairement dans les applications les corps entre lesquels les chocs s'opèrent comme présentant les propriétés admises dans le n° 340, d'où il résulte que les surfaces en contact des deux corps qui se sont choqués, sont supposées ne point se séparer dans l'instant qui suit le choc, et que par l'effet du choc le système a perdu la quantité de force vive qui serait due aux vitesses que les corps ont perdues. En opérant d'ailleurs conformément aux notions présentées dans le n° 275, et à ce qui a été dit à la fin du n° 341, on déterminera toujours les changements de vitesse résultant des chocs, détermination pour laquelle il faudra en général prendre en considération des résistances particulières qui ne se développent qu'à l'instant du choc, et cessent quand il est terminé. On pourra donc apprécier les pertes de force vive qui résulteraient d'un choc. Quant à la manière d'en tenir compte dans le calcul de la machine ; soit en général m la masse d'une partie de cette machine, et v la différence entre les vitesses de cette partie qui ont lieu avant et après le choc : la perte de force vive due au choc sera, d'après ce qui a

été dit ci-dessus, et conformément au n° 341, exprimée par $S.mv^2$, le signe S indiquant que l'on a formé la somme de toutes les pertes de force vive mv^2 qui ont eu lieu dans l'appareil. On en conclut que les forces intérieures, développées pendant la durée du choc, ont produit une quantité d'action exprimée numériquement par $\frac{1}{2} S mv^2$; et par suite qu'en posant l'équation (D) et opérant de la manière indiquée n° 354, on doit ajouter cette quantité d'action au second nombre, et écrire :

$$\int P dp = S \int F df + \frac{1}{2} S.mv^2 + \int Q dq. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Il est nécessaire en effet que le moteur ait reproduit dans le sens du mouvement la quantité d'action que les forces développées par le choc ont consommée; puisque nous supposons qu'à la fin de l'intervalle de temps pour lequel les intégrales désignées par $\int$ sont prises, toutes les parties de l'appareil ont repris les vitesses qui avaient lieu au commencement de cet intervalle, en sorte que la force vive du système n'a subi aucune altération.

356. L'utilité principale des machines, considérées sous le point de vue économique, consiste dans les moyens qu'elles présentent pour substituer, dans les opérations des arts, les forces des animaux et surtout celles des agents naturels (tels que la chute des corps graves, le choc des vents, les changements d'état produits par la chaleur, etc.), à la force plus coûteuse de l'homme. On donne en général le nom de *moteur* à tout agent naturel dont l'action peut faire marcher une machine et

exécuter par son moyen un travail. Ainsi l'action d'un ou plusieurs animaux, celle d'une chute d'eau, celle du vent dont le choc serait reçu sur une surface donnée, celle qui résulte de la combustion d'une quantité déterminée de charbon, etc., sont des moteurs.

Un moteur étant donné, il est évident que la quantité de travail que l'on pourra lui faire produire est limitée. On reconnaît de plus, par un examen attentif, que l'on peut tirer du même moteur des quantités de travail très-différentes, suivant la manière dont son action est employée. En désignant, comme ci-dessus, par P, l'effort exercé par le moteur, et par V, la vitesse du point d'application de cet effort, on a PV pour l'expression de la quantité d'action produite dans l'unité de temps. Or les quantités P et V sont toujours liées l'une à l'autre de telle manière que l'une diminue quand l'autre augmente : on doit chercher à régler l'action de manière que la valeur du produit PV soit la plus grande qu'il est possible.

Lorsqu'il s'agit de l'homme ou d'un animal qui ne peut travailler chaque jour que pendant un certain temps T, l'action journalière est représentée par PVT.

Les trois facteurs de ce produit ont également des valeurs dépendantes les unes des autres, dont chacune diminue nécessairement lorsque les deux autres augmentent, et qu'il faut chercher à régler de manière à obtenir, à fatigue égale, la plus grande quantité de travail qu'il est possible.

XXIV. Équations générales de l'équilibre d'un fluide sollicité par des forces quelconques.

357. On désigne généralement par le nom de *fluides* les corps qui n'opposent presque aucune résistance lorsqu'on entreprend d'en faire mouvoir les parties les unes par rapport aux autres, ou par rapport aux parois solides des vases dans lesquels les fluides sont contenus. On distingue d'ailleurs deux espèces de fluides : 1° les *fluides incompressibles* dons le volume, à masse égale, est sensiblement invariable, et qui, lorsqu'ils ne sont soumis à l'action d'aucune force extérieure, peuvent être contenus dans un vase de figure quelconque sans exercer aucun effort contre les parois de ce vase ; 2° les *fluides élastiques*, dont le volume, à masse égale, peut varier d'une manière indéfinie, dont les parties tendent sans cesse à s'écarter les unes des autres par l'effet d'une force de répulsion intérieure, et qui exercent toujours un certain effort contre les parois des vases qui les contiennent.

Nous disons que les fluides n'opposent *presque aucune résistance* quand on entreprend d'en faire mouvoir les parties. En effet, dans la nature, ces parties présentent généralement un certain degré d'adhérence, et elles ne peuvent être mues les unes par rapport aux autres sans un effort sensible. Mais comme les résistances dont il s'agit sont fort petites par rapport aux forces qui produisent les phénomènes principaux, il convenait d'en faire d'abord abstraction en formant la théorie mécanique de l'équilibre et du mouvement des fluides.

358. Cela posé, nous considérerons, en premier lieu, les positions de l'équilibre d'une portion de fluide AB contenu dans un tuyau solide et fixe (fig. 36), dont la section est uniforme et infiniment petite, et dont l'axe est une ligne quelconque donnée. On suppose qu'aux extrémités A,B de la colonne de fluide, se trouvent deux diaphragmes mobiles auxquels sont appliquées extérieurement des forces. De plus, les molécules du fluide sont sollicitées par des forces quelconques. Pour trouver les conditions de l'équilibre de ce système, on remarquera que, par la nature du fluide, une tranche quelconque mn, dont nous supposons l'épaisseur infiniment petite, peut glisser librement dans le sens de l'axe du tuyau. Cette tranche est sollicitée : 1° par la pression que le fluide supérieur exerce sur sa face m; 2° par la pression que le fluide inférieur exerce en sens contraire sur sa face n; 3° par les forces agissant sur les molécules dont elle est composée. Les deux pressions peuvent être regardées comme dirigées suivant la tangente à l'axe du tuyau menée par le centre de la tranche, puisque nous supposons l'épaisseur de cette tranche infiniment petite. L'équilibre exige donc que la différence de ces pressions soit égale et de signe contraire à la force agissant sur les molécules de la tranche, décomposée dans le sens de la tangente à l'axe du tuyau. Nous nommerons

ω l'aire constante et infiniment petite de la section transversale du tuyau;

x, y, z les coordonnées rectangulaires du point de l'axe du tuyau où est placée la tranche mn;

s la longueur de cet axe comptée d'une origine fixe jusqu'au même point;

a, b les valeurs de l'abscisse x pour les points A,B de l'axe du tuyau où sont placées les extrémités de la colonne de fluide;

P,Q les valeurs rapportées à l'unité de surface des pressions qui sont exercées sur les sections extrêmes A,B;

p la valeur, rapportée à l'unité de surface, de la pression qui est exercée sur la face de la tranche mn placée à l'extrémité de l'arc s;

ρ la densité du fluide, ou la masse de l'unité de volume, dans le lieu du tuyau où est placée la tranche mn;

X,Y,Z les valeurs des vitesses qu'imprimeraient dans l'unité de temps aux parties matérielles, dans le sens des coordonnées x, y, z, les forces agissant sur les molécules du fluide placées dans le même lieu du tuyau;

et nous remarquerons que la figure du tuyau est donnée par deux équations entre les coordonnées x, y, z dans lesquelles x sera prise pour la variable indépendante. L'arc s doit alors être regardé comme une fonction de x; et il en est de même de la pression p, de la densité ρ, et des composantes X,Y,Z de la force par laquelle les molécules du fluide sont sollicitées.

Le volume de la tranche mn étant ωds, et sa masse $\rho\omega ds$, l'effort exercé sur cette tranche, décomposé dans le sens de l'axe du tuyau, est

$$\rho\omega ds\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right).$$

Les valeurs des pressions exercées sur ses deux faces étant d'ailleurs

$$p\omega \quad \text{et} \quad (p+dp)\omega,$$

on voit que la condition de l'équilibre de la tranche énoncée ci-dessus s'exprimera par l'équation

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

à laquelle doivent satisfaire les expressions de p et ρ en x dans toute l'étendue du fluide.

359. On déduit de l'équation précédente

$$p = const. + \int \rho(Xdx + Ydy + Zdz);$$

et comme on doit substituer dans la quantité qui est sous le signe d'intégration les valeurs de y, z, ρ, X, Y et Z en x, l'intégrale est ici une intégrale ordinaire relative à la variable x. Il faut d'ailleurs que l'expression précédente convienne aux deux extrémités A,B de la colonne de fluide. Ainsi, l'on aura d'abord, pour la valeur de la pression dans une section quelconque m,

$$p = P + \int_a^x \rho(Xdx + Ydy + Zdz);$$

et de plus l'équation

$$Q = P + \int_a^b \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

pour exprimer la condition de l'équilibre de cette colonne. La condition de l'équilibre laisse donc entièrement arbitraires les valeurs des forces X, Y, Z, pourvu que l'on soit maître de fixer la différence des pressions extrêmes P et Q.

360. Si les molécules du fluide n'étaient solli-

citées par aucune force, l'équation précédente se réduirait à

$$P=Q,$$

c'est-à-dire que l'équilibre exigerait l'égalité des deux pressions $P\omega$, $Q\omega$ exercées extérieurement en sens contraire aux deux extrémités de la colonne.

Ces résultats conviennent également au cas d'un fluide incompressible dans lequel la densité est constante ou variable, et au cas d'un fluide élastique. Il faut remarquer seulement que s'il s'agit d'un fluide incompressible, l'équilibre pourra subsister dans le cas même où l'on supposerait nulles les pressions extrêmes P, Q; tandis que cela serait impossible pour un fluide élastique, à raison des forces intérieures qui tendent sans cesse à faire augmenter le volume de ce corps.

361. Considérons maintenant une portion de fluide incompressible remplissant un vase fermé quelconque, et supposons d'abord que les molécules ne soient sollicitées par aucune force. Les parties du fluide demeureront immobiles, sans exercer aucune pression les unes contre les autres, ni contre la paroi du vase. Admettons ensuite qu'une portion quelconque infiniment petite A (fig. 37) de la paroi du vase devienne un diaphragme mobile ayant pour aire ω, et sur lequel on exerce extérieurement un effort $P\omega$, en sorte qu'il en résulte pour l'unité de surface de ce diaphragme la pression P, l'équilibre du fluide contenu dans le vase exigera que cette pression soit transmise dans toutes ses parties; c'est-à-dire que si l'on y mène un plan quelconque B, les deux portions de fluide séparées par ce plan exerceront l'une contre l'autre une

pression dont la valeur, rapportée à l'unité de surface, sera la même pour toutes les parties du plan, et égale à P. En effet, une portion quelconque infiniment petite du plan dont il s'agit, dont l'aire serait ω, peut toujours être regardée comme l'extrémité de la colonne de fluide AB, de grosseur uniforme et de figure quelconque. Or si l'équilibre subsiste, cet équilibre ne doit pas être altéré lorsqu'on admet que tout le fluide devient solide à l'exception de la colonne AB. Donc cette colonne considérée comme étant contenue dans un tuyau solide fixe doit être en équilibre. Il est donc nécessaire, conformément à ce qu'on a vu dans le numéro précédent, que des pressions égales entre elles soient exercées en sens contraires aux deux extrémités. On pourrait également supposer l'extrémité B de la colonne AB placée en un point quelconque de la paroi du vase. Ainsi dans un point quelconque de l'intérieur du fluide ou de sa surface, et quelle que soit la direction d'un plan que l'on ferait passer par ce point, les deux parties séparées par ce plan exercent l'une contre l'autre une pression dont la valeur est, à surface égale, la même qui a lieu sur le diaphragme mobile placé en A.

362. Il résulte de ce qui précède que s'il y avait à la surface du vase d'autres ouvertures fermées par des diaphragmes mobiles dont les aires seraient ω', ω'', ω''', etc., l'équilibre exigerait que l'on appliquât extérieurement à ces diaphragmes des efforts $P\omega'$, $P\omega''$, $P\omega'''$, etc.

On vérifie d'ailleurs que ces forces qui se feraient ainsi équilibre sur un système formé de la paroi fixe du vase et du fluide incompressible qui y est contenu,

auraient entre elles les relations qui seraient données par l'application immédiate du principe des vitesses virtuelles. Admettons en effet qu'un mouvement très-petit ait été imprimé au fluide, par l'effet duquel les diaphragmes ω, ω', ω'', etc., se soient mus parallèlement à eux-mêmes des quantités δp, $\delta p'$, $\delta p''$, etc. Désignant généralement par P, P′, P″, etc., les pressions exercées extérieurement sur l'unité de surface de chaque diaphragme, la condition de l'équilibre donnée par le principe des vitesses virtuelles est

$$P\omega.\delta p+P'\omega'.\delta p'+P''\omega''.\delta p''+\text{etc.}=0.$$

Or le volume total du fluide étant supposé invariable, la condition à laquelle les mouvements des parties du système sont assujettis est exprimée ici par l'équation

$$\omega.\delta p+\omega'.\delta p'+\omega''.\delta p''+\text{etc.}=0,$$

avec laquelle la précédente ne peut pas subsister à moins que l'on ne prenne $P=P'=P''=$ etc.

363. Si le vase renferme un fluide élastique dont les molécules ne soient sollicitées par aucune force, on verra, par un raisonnement semblable à celui du n° 361, que pour qu'il y ait équilibre, c'est-à-dire pour que les parties du fluide demeurent immobiles, il doit exister, dans tous les points de ce fluide, et suivant toutes les directions, une pression constante. Cette même pression est également exercée contre la paroi solide du vase. Elle est due à la force répulsive des molécules du fluide. S'il existe dans la paroi du vase une ou plusieurs ouvertures formées par des dia-

phragmes, il faudra nécessairement, pour que l'équilibre ne soit point rompu, leur appliquer extérieurement des forces égales au produit de l'aire du diaphragme par la valeur de la pression intérieure rapportée à l'unité de surface.

364. Admettons présentement que les molécules d'un fluide incompressible ou élastique sont sollicitées par des forces quelconques, et cherchons les conditions de l'équilibre de ces forces. Si cet équilibre existe, il ne sera point détruit dans le cas où tout le fluide deviendrait solide à l'exception de la colonne de figure quelconque AB (fig. 38), supposée d'une grosseur uniforme et infiniment petite. Donc cette colonne, considérée comme contenue dans un tuyau solide fixe, sera en équilibre, et on pourra lui appliquer les résultats obtenus n°s 358 et 359, en sorte qu'on aura les équations

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

et

$$p = const. + \int \rho(Xdx + Ydy + Zdz),$$

dans lesquelles on doit regarder les coordonnées x, y, z comme appartenant à la ligne qui forme l'axe du tuyau. La constante, dans l'expression de p, représente évidemment la valeur de la pression à l'extrémité A du tuyau la plus voisine de l'origine des coordonnées. En prenant l'intégrale entre des limites correspondant à l'extrémité A et à un point quelconque m du tuyau, l'équation précédente donnera la pression qui a lieu au point m dans le sens de l'axe du tuyau. En prenant cette même intégrale entre les limites qui répondent aux extrémités A et B, l'équation donnera la pression qui a lieu

à l'extrémité B. Pour trouver d'ailleurs la valeur de l'intégrale dont il s'agit, on substituerait dans la fonction $\rho\,(Xdx+Ydy+Zdz)$, à la place de y et z, dy et dz, leurs valeurs en x et dx données par les équations de l'axe du tuyau, et l'on n'aurait plus qu'une intégrale simple relative à la seule variable x, dont la valeur peut toujours être déterminée.

Mais nous remarquerons qu'entre les deux points A et B pris arbitrairement dans le fluide, on peut concevoir une infinité de canaux de figure quelconque à chacun desquels ce qui vient d'être dit peut être appliqué. Or, quelle que soit la figure atribuée au canal, il est nécessaire qu'il résulte de l'opération précédente une même valeur pour la pression existante à l'extrémité B; d'où l'on conclut que la fonction $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$ doit être telle que prenant l'intégrale $\int\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$ entre des limites correspondantes à deux points quelconques du fluide, on trouve pour cette intégrale une même valeur, quelle que soit la relation supposée entre les variables x, y, z. Donc l'intégrale dont il s'agit doit pouvoir être prise sans qu'il soit nécessaire d'y substituer pour y et z leurs valeurs en x, c'est-à-dire que la fonction $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$ doit être la différentielle complète d'une fonction des trois variables x, y, z. Cette condition est exprimée, conformément au n° 366 des *Leçons d'Analyse*, par les équations

$$\frac{d.\rho X}{dy}=\frac{d.\rho Y}{dx},\quad \frac{d.\rho X}{dz}=\frac{d.\rho Z}{dx},\quad \frac{d.\rho Y}{dz}=\frac{d.\rho Z}{dy},$$

auxquelles les valeurs des forces X, Y, Z doivent satisfaire dans toute l'étendue du fluide, pour que ce fluide demeure en équilibre sous l'action de ces forces.

Dans le cas particulier où le fluide est incompressible et homogène, la densité ρ étant constante, il est nécessaire, pour que l'équilibre subsiste, que la fonction $Xdx+Ydy+Zdz$ soit une différentielle complète d'une fonction des trois variables x, y, z, et par conséquent que les composantes de la force qui sollicite chaque molécule satisfassent aux équations

$$\frac{dX}{dy}=\frac{dY}{dx},\ \frac{dX}{dz}=\frac{dZ}{dx},\ \frac{dY}{dz}=\frac{dZ}{dy}.$$

L'action de la plupart des forces naturelles est conforme à ces conditions. Elles seront accomplies toutes les fois que les molécules du fluide seront sollicitées par des forces émanant de centres fixes, et dont l'intensité sera fonction des distances des molécules à ces centres, ou par des forces qui s'exercent entre ces molécules mêmes, et sont fonctions de leurs distances mutuelles.

366. Les équations du n° 364 étant satisfaites, la valeur de la pression rapportée à l'unité de surface est donnée dans un point quelconque du fluide par l'équation suivante :

$$p=const.+\int\rho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

L'expression de p en x, y, z, n'est autre chose que la fonction même de ces trois variables dont la quantité $\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$ est la différentielle complète. Ainsi, dans un fluide en équilibre, la pression est toujours exprimée par une fonction finie des coordonnées auxquelles sont rapportés les points du fluide. Il est visible d'ailleurs que pour un point donné, la valeur de la pression sera trouvée la même, quelle que soit la direction dans le sens de laquelle on la considère, puisque p n'est exprimé qu'en

fonction des coordonnées du point m, et ne dépend nullement de la direction de l'axe de la colonne AB en ce point. La constante se déterminera d'après la valeur de la pression dans un point déterminé du fluide, valeur qui doit être donnée. En mettant ensuite dans la formule précédente, pour x, y, z, les coordonnées d'un point quelconque du fluide, on connaîtra la pression qui s'exerce en ce point dans toutes les directions.

367. La même formule donne également la pression exercée contre la paroi solide d'un vase dans lequel le fluide serait contenu. Cette pression est alors détruite par la résistance de la paroi. Mais lorsque la surface du fluide n'est pas appuyée contre une paroi solide, et ne reçoit aucune pression extérieure, l'équilibre exige évidemment que l'expression précédente de p devienne nulle lorsqu'on y met pour x, y, z les valeurs qui appartiennent à cette surface. Cette condition ne peut subsister en général à moins que l'on n'ait

$$Xdx+Ydy+Zdz=0,$$

équation à laquelle doivent satisfaire les coordonnées x, y, z appartenant à la *surface libre* du fluide, et qui doit être regardée comme l'équation différentielle de cette surface. Elle indique une propriété remarquable de la surface dont il s'agit, qui consiste en ce que la direction de la normale en un point quelconque coïncide toujours avec la direction de la force par laquelle les molécules du fluide sont sollicitées.

On remarquera que cette équation différentielle appartient non-seulement à une surface dans tous les points de laquelle la pression est nulle, mais encore

à toute surface dans tous les points de laquelle la pression conserve une valeur constante quelconque. On a nommé les surfaces dont il s'agit *surfaces de niveau*, et on les distingue, dans l'intérieur d'un fluide, par leur propriété de rencontrer toujours à angle droit la direction de la force qui sollicite les molécules de ce fluide.

Lorsque la surface d'un fluide ne s'appuie point contre une paroi solide, et qu'elle supporte néanmoins dans tous ses points une pression normale constante, comme cela a lieu dans le cas où la pression atmosphérique s'exerce sur cette surface, l'équilibre exige évidemment que sa figure satisfasse à la condition précédente; c'est-à-dire qu'elle soit une surface de niveau.

On voit d'ailleurs que l'équation

$$Xdx+Ydy+Zdz=0,$$

devant être toujours intégrable, soit d'elle-même, soit en la multipliant par le facteur ρ; la surface libre d'un fluide en équilibre est toujours représentée par une équation finie entre les coordonnées x, y, z.

368. Dans la plupart des cas naturels, la fonction $Xdx+Ydy+Zdz$, comme on l'a remarqué n° 365, est la différentielle complète d'une fonction de x, y, z que nous désignerons par Π. On aura donc alors

$$dp=\rho.d\Pi \quad \text{et} \quad p=const.+\int \rho.d\Pi.$$

Or il est nécessaire pour l'équilibre du fluide que $\rho.d\Pi$ soit une différentielle complète d'une fonction de x, y, z, ce qui ne peut avoir lieu à moins que ρ ne soit une fonction de Π. Donc p sera une fonction de ρ, et par

conséquent ces deux quantités varieront ensemble ou demeureront constantes ensemble, quand on passera d'un point à l'autre du fluide. L'équilibre exige donc que la densité soit constante en même temps que la pression dans toute l'étendue de chacune des surfaces de niveau. Ainsi, quand les parties d'un fluide n'ont pas la même densité, elles se disposent entre elles en se mettant en équilibre sous l'action de forces quelconques, de manière que les parties dont la densité est la même forment des couches séparées par les surfaces de niveau Cette disposition est nécessaire pour que l'équilibre puisse subsister.

Dans le cas d'un fluide incompressible et hétérogène, l'équilibre peut avoir lieu, quelle que soit la loi suivant laquelle la densité varie d'une couche de niveau à une autre. On doit remarquer seulement que l'équilibre ne sera stable qu'autant que les couches du fluide seront disposées de manière que les plus denses soient les plus rapprochées des centres dont émanent les forces attractives par lesquelles les molécules sont sollicitées.

369. Dans le cas d'un fluide élastique homogène, où la densité est supposée proportionnelle à la pression, la loi suivant laquelle la densité varie d'une couche de niveau à une autre est déterminée. Soient

$$p = k\rho,$$

k étant un coefficient constant, l'équation précédente devient

$$k\,\frac{dp}{p} = d\Pi\,;$$

elle donne en intégrant

$$p = \mathrm{A}.e^{\frac{\Pi}{k}}, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{\mathrm{A}}{k}.e^{\frac{\Pi}{k}},$$

A étant une constante arbitraire, et e la base des logarithmes népériens.

370. Dans les questions qui se rapportent aux effets naturels, la densité ne peut être supposée proportionnelle à la pression dans un fluide élastique, à moins que la température ne soit constante dans toute l'étendue du fluide. En général la densité est fonction de la température et de la pression. L'équilibre exigeant que le second membre de l'équation $dp=\rho dΠ$ soit une différentielle complète, il faudra que ρ soit une fonction de Π. Cette équation étant intégrée donnera la loi des pressions, d'où l'on conclura celle des densités. Mais ρ étant fonction de la température, il en sera de même de p; d'où l'on conclut que la pression et la température seront constantes ensemble et varieront ensemble dans l'intérieur du fluide. L'équilibre ne peut donc subsister dans un fluide élastique à moins que la température ne soit uniforme dans tous les points d'une même surface de niveau. Dans la réalité, cette proposition doit aussi s'appliquer aux fluides appelés communément incompressibles, puisque leur densité varie sensiblement avec la température, ce qui explique les mouvements que prennent les parties d'un fluide de cette nature par le seul effet d'une distribution inégale de la température.

371. Pour donner une application des résultats précédents, on considérera le cas d'une masse fluide dont toutes les molécules seraient attirées vers un centre pris pour origine des coordonnées avec une force proportionnelle à leur distance à ce centre, et tourneraient autour de l'axe des z avec une même vitesse angulaire. Désignant par F la force d'attraction centrale pour l'u-

nité de masse et l'unité de distance, la valeur de cette force au point ayant pour coordonnées x, y, z sera $-F\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; et ses trois composantes dans le sens des axes seront respectivement $-Fx, -Fy, -Fz$. La valeur de la force centrifuge au même point, en appelant ν la vitesse angulaire, sera $\nu^2\sqrt{x^2+y^2}$; et ses trois composantes dans le sens des axes seront respectivement ν^2x, ν^2y, et 0. Ainsi la fonction désignée dans les numéros précédents par $Xdx+Ydy+Zdz$ est ici $-F(xdx+ydy+zdz)+\nu^2(xdx+ydy)$, et l'on a par conséquent pour l'équation différentielle des surfaces de niveau, et de la surface même du fluide supposé en équilibre,

$$F(xdx+ydy+zdz)-\nu^2(xdx+ydy)=0.$$

Comme le fluide doit évidemment affecter ici la figure d'un solide de révolution autour de l'axe des z, il suffit de considérer un des méridiens. En faisant donc $y=0$, il viendra

$$F(xdx+zdz)-\nu^2xdx=0,$$

équation qui donne en intégrant

$$F(x^2+z^2)-\nu^2x^2=A,$$

A étant une constante arbitraire. Ainsi la figure affectée par le fluide est celle d'un ellipsoïde de révolution autour du petit axe si F est $>\nu^2$. Dans le cas contraire on obtient un hyperboloïde de révolution autour de l'axe imaginaire. Les actions auxquelles les parties des fluides placées à la surface de la terre sont soumises, diffèrent peu de l'action d'une force centrale proportionnelle à la distance, comme on peut en juger d'après le n° 203, et

la force centrifuge est fort petite par rapport à cette force centrale : il en résulte que la figure affectée par la surface des mers approche beaucoup de celle d'un ellipsoïde de révolution dont le rayon à l'équateur excède d'une petite quantité le rayon au pôle.

XXV. Équilibre des fluides incompressibles pesants.

372. Considérons un fluide incompressible homogène contenu dans un vase et sollicité par l'action de la gravité, c'est-à-dire par une force constante dont la direction est parallèle à la verticale. En conservant les dénominations des n°s 358 et suivants, supposant le plan des xy horizontal et les z comptées de haut en bas, on devra, pour appliquer les résultats des numéros cités, faire $X=0, Y=0, Z=g$, en désignant toujours par g la vitesse imprimée aux corps pesants par la gravité dans l'unité de temps. La fonction $Xdx+Ydy+Zdz$ se réduira à gdz; les équations du n° 364 qui expriment les conditions nécessaires pour l'équilibre seront satisfaites, et l'expression de p du n° 366 deviendra

$$p=P+\rho gz,$$

P désignant une constante. Ainsi un fluide incompressible pesant demeurera toujours en équilibre pourvu que la paroi du vase résiste à la pression dont la valeur est donnée par cette formule.

373. Soit un vase fermé, de figure quelconque, et rempli de fluide. Admettons que le plan des xy passe par le point le plus élevé de la paroi. La constante P représentera alors la pression qui a lieu en ce point. Or, on peut supposer que le fluide a été versé dans le vase

par une ouverture placée à la partie supérieure, puis que cette ouverture a été fermée sans qu'aucun effort fût exercé; on aura alors évidemment $P=0$, et les pressions dans l'intérieur du vase seront données simplement par l'expression

$$p=\rho gz.$$

On peut supposer également que l'ouverture a été fermée par un diaphragme sur lequel on a exercé un effort, les pressions dans l'intérieur du vase seront alors exprimées par

$$p=P+\rho gz.$$

P représente la valeur de l'effort dont il s'agit divisée par l'aire du diaphragme, c'est-à-dire la valeur de la pression exercée, rapportée à l'unité de surface. Dans tous les cas, la valeur de la pression est la même pour tous les points du fluide appartenant à une section horizontale quelconque, et cette valeur augmente, quand on passe d'une section horizontale à une autre, d'une quantité proportionnelle à la différence de niveau des deux sections.

374. Soit maintenant un vase ouvert à sa partie supérieure, de sorte que dans cette partie la surface du fluide soit libre. La figure de cette surface sera donnée, d'après le n° 367, par l'équation

$$dz=0 \quad \text{ou} \quad z=const.,$$

c'est-à-dire qu'elle sera un plan horizontal. Nous la prendrons pour le plan des xy. La constante P, dans l'expression $p=P+\rho gz$, représentera donc la pression

exercée sur la surface supérieure du fluide, et l'on devrait faire $P=0$ si cette surface ne supportait aucune pression. Mais cette hypothèse ne peut être admise dans les cas naturels. Lorsque le vase et le fluide sont placés dans l'atmosphère, P représente la pression atmosphérique sur l'unité de surface. Ainsi la pression qui a lieu dans un point quelconque du fluide est formée de deux parties : 1° la pression atmosphérique représentée par la constante P, qui se transmet sans altération dans tout le fluide ; 2° la pression due à l'action de la gravité sur le fluide représentée par le terme $\rho g z$. On voit que cette dernière partie est égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base l'unité de surface et pour hauteur la distance du point que l'on considère à la surface libre du fluide. Ici, comme dans le cas précédent, la pression est la même pour tous les points de chaque section horizontale.

Ces résultats sont absolument indépendants de la figure du vase, et l'on reconnaît aisément qu'ils conviennent même au cas où cette figure serait telle que la surface libre du fluide se trouverait partagée en plusieurs parties séparées les unes des autres. Les différentes parties de cette surface doivent toujours se trouver dans un même plan horizontal, et la pression est la même pour tous les points du fluide placés dans un même plan horizontal quelconque.

Si le vase présente une partie MN (fig. 39), remplie de fluide, plus élevée que le niveau MM de la surface libre qui reçoit la pression atmosphérique, le fluide en se mettant en équilibre s'élèvera dans cette partie au-dessus du ni-

veau MM à une hauteur $z = \frac{P}{\rho g}$; et si la hauteur MN est moindre que cette quantité, le fluide exercera alors de bas en haut contre la paroi NN une pression exprimée par $P - \rho g z$, z désignant la hauteur MN. Ainsi la hauteur à laquelle on verra le fluide s'élever dans la partie MN au-dessus du niveau M (en supposant qu'il reste dans cette partie au-dessus du fluide un espace entièrement vide) sera proportionnelle à la pression atmosphérique et en donnera la mesure.

375. On reconnaît facilement que s'il existe dans le même vase plusieurs fluides incompressibles et pesants de densités inégales, l'équilibre ne peut subsister à moins que ces fluides ne soient disposés par couches séparées par des plans horizontaux et dans chacune desquelles il ne se trouve que des parties ayant une même densité. De plus, cet équilibre ne sera stable qu'autant que les couches seront placées dans l'ordre des densités, les plus denses occupant la partie inférieure du vase. La valeur de la pression est donnée par la formule

$$p = P + g \int \rho dz;$$

et par conséquent la partie due à la pesanteur du fluide est égale ici, comme dans le cas du numéro précédent, au poids du fluide compris dans un prisme droit dont la base égale à l'unité de surface est à la surface libre du fluide, et dont la hauteur est la verticale menée du point que l'on considère à cette surface.

Calcul des pressions supportées par les parois des vases.

376. On traitera cette question d'une manière générale en concevant qu'une surface contre laquelle s'appuie le fluide est représentée par l'équation

$$z = f(x, y),$$

et qu'il s'agit de déterminer la pression supportée par une partie de cette surface terminée par un contour donné. Nous admettrons ici, comme dans les numéros précédents, que le plan des xy est la surface libre du fluide, et que les z sont comptées de haut en bas à partir de ce plan. Nous représenterons par

$$y = \varpi(x), \quad z = \varphi(x), \quad z = \psi(y),$$

les équations des projections sur les plans des xy, des xz et des yz du contour de la portion de la surface que l'on considère, en observant qu'il suffit de donner une seule de ces équations pour connaître les deux autres au moyen de l'équation de la surface. Cela posé, on remarquera, d'après le n° 374, et en faisant d'abord abstraction de la pression atmosphérique P pour ne considérer que les pressions dues au seul poids du fluide, qu'un élément quelconque infiniment petit ω de la surface proposée placé à la distance z au-dessous du plan des xy supportera une pression exprimée par $g\omega\int_0^z dz.\rho$, et dirigée suivant la normale à cette surface.

Les pressions qui s'exercent ainsi sur les différents éléments de la surface constituent un système de forces qu'il est toujours aisé de réduire à deux forces horizontales dirigées parallèlement aux x et aux y, et à une force verticale.

En effet, désignons par γ, β, α les angles que le plan de l'élément ω forme avec les plans des xy, des xz et des yz ; ou bien les angles que la normale forme avec les axes des z, des y et des x. Nous aurons, pour les trois composantes de la pression élémentaire parallèles à ces axes,

$$\cos.\gamma.g\omega\int_0^z dz.\rho\,,\quad \cos.\beta.g\omega\int_0^z dz.\rho\,,\quad \cos.\alpha.g\omega\int_0^z dz.\rho.$$

Mais $\omega\cos.\gamma$, $\omega\cos.\beta$, $\omega\cos.\alpha$ représentent respectivement les projections de l'aire ω sur les plans des xy, des xz et des yz : donc les composantes de la pression élémentaire sont à cette pression comme les projections de l'aire ω sont à cette aire. On conclut de cette remarque : 1° que la résultante des composantes parallèles à l'axe des x est égale en grandeur et en direction pour la surface proposée à ce qu'elle serait pour la projection de cette surface sur le plan vertical des yz; 2° que la résultante des composantes parallèles à l'axe des y est aussi égale en grandeur et en direction pour la surface proposée à ce qu'elle serait pour la projection de cette surface sur le plan vertical des xz : 3° enfin que la résultante des composantes verticales est le poids du fluide compris entre la surface proposée, le plan horizontal de la surface libre du fluide, et le cylindre ver-

tical projetant le contour de la surface proposée sur ce plan. La direction de cette dernière résultante partielle passe évidemment par le centre de gravité du fluide dont il s'agit.

377. Il résulte de ce qui précède que la recherche des pressions supportées par une surface quelconque donnée se ramène à chercher les pressions supportées par une aire donnée sur un plan vertical ; et à calculer le poids d'un volume de fluide dont la surface est donnée. Si l'on désigne par p, q, r les trois résultantes partielles des pressions dont il s'agit dirigées respectivement dans le sens des x, des y et des z, 1° on aura généralement

$$p = g\int dy \int dz \int_0^z dz.\rho \;;$$

et pour les distances des directions de la force p aux plans des xy et des xz

$$\frac{g}{p}\int dy \int dz.z \int_0^z dz.\rho, \quad \frac{g}{p}\int dy.y \int dz \int_0^z dz.\rho \,,$$

les limites des intégrales étant données par l'équation $z = \psi(y)$.

2° On aura

$$q = g\int dx \int dz. \int_0^z dz.\rho \;;$$

et pour les distances de la direction de la force q aux plans des xy et des yz,

$$\frac{g}{q}\int dx\int dz.z\int_o^z dz.\rho\,,\quad \frac{g}{q}\int dx.x\int dz\int_o^z dz.\rho\,,$$

les limites des intégrales étant données par l'équation $z=\varphi(x)$.

3° Enfin on aura

$$r=g\int dx\int dy\int_o^{f(x,y)} dz.\rho\,;$$

et pour les distances de la direction de la force r aux plans des xz et des yz

$$\frac{g}{r}\int dx\int dy.y\int_o^{f(x,y)} dz.\rho\,,\quad \frac{g}{r}\int dx.x\int dy\int_o^{f(x,y)} dz.\rho\,,$$

les limites des intégrales étant données par l'équation $y=\varpi(x)$.

Le fluide étant supposé en équilibre, si la densité ρ n'est pas constante, elle sera toujours une fonction donnée de l'ordonnée z seule, conformément à ce qu'on a vu n° 375.

Si la densité ρ est constante, on écrira dans les formules précédentes ρz à la place de l'intégrale $\int_o^z dz.\rho$; $\rho f(x, y)$ à la place de l'intégrale $\int_0^{f(x,y)} dz.\rho$.

En général, les trois forces p, q, r ne se composeront pas en une force unique. Il serait nécessaire pour cela que les intégrales doubles qui donnent les valeurs

de ces forces et de leurs moments, par rapport aux axes des x, des y et des z, satisfissent à l'équation de condition du n° 56.

378. Si l'on veut maintenant tenir compte de la pression atmosphérique P qui s'exerce à la surface supérieure du fluide, il suffira de remplacer dans les formules précédentes $g\int_0^z dz.\rho$ par $g\int_0^z dz.\rho+\mathrm{P}$, ou d'ajouter le terme $\frac{\mathrm{P}}{g}$ à l'intégrale $\int_0^z dz.\rho$.

Dans le cas où la densité ρ sera constante, on ajoutera P à $\rho g z$, ou $\frac{\mathrm{P}}{\rho g}$ à z.

Les forces désignées par p, q, r se trouveront augmentées respectivement de quantités égales aux produits de P par les aires des projections de la surface proposée sur les plans des yz, des xz et des xy; et les directions de ces forces ne rencontreront plus ces plans dans les mêmes points.

379. Lorsque la surface contre laquelle s'appuie le fluide est plane, les pressions élémentaires se composent toujours en une force unique, puisqu'elles sont toutes parallèles et dirigées dans le même sens. Supposons ρ constante, prenons pour axe des x l'intersection de la surface plane dont il s'agit avec la surface libre du fluide qui est le plan des xy, et soit θ l'angle compris entre ces deux plans. L'équation désignée ci-dessus par $z=f(x,y)$ deviendra

$$z=y\,\mathrm{tang}.\theta, \quad \text{ou} \quad y=\frac{z}{\mathrm{tang}.\theta}.$$

La résultante p des pressions horizontales parallèles aux x sera nulle. On aura

$$q = \rho g \int dx \int dz.z\,;$$

et pour les distances de la direction de q aux plans des xy et des yz

$$\frac{\int dx \int dz.z^2}{\int dx \int dz.z}, \quad \frac{\int dx.x \int dz.z}{\int dx \int dz.z},$$

les limites des intégrales étant données par l'équation $z = \varphi(x)$. Quant à la résultante r des pressions verticales, les formules du numéro précédent donnent

$$r = \text{tang}.\theta.\rho g \int dx \int dy.y\,;$$

et pour les distances de la direction de la force r aux plans des xz et des yz

$$\frac{\int dx \int dy.y^2}{\int dx \int dy.y}, \quad \frac{\int dx.x \int dy.y}{\int dx \int dy.y},$$

les limites des intégrales étant données par l'équation $y = \varpi(x)$ qui ne doit pas différer ici de $y = \frac{\varphi(x)}{\text{tang}.\theta}$.

Quelle que soit d'ailleurs la figure du contour tracé

sur la paroi plane, contour dont l'équation $z=\varphi(x)$ représente la projection verticale sur le plan des xz, les formules précédentes donnent lieu aux remarques suivantes :

1° Les distances des directions des forces q et r au plan des yz sont égales entre elles, en sorte que ces forces sont toujours comprises dans un même plan vertical perpendiculaire à la paroi plane proposée, et peuvent se composer en une seule force.

2° La distance de la force r au plan des xz est égale à la distance de la force q au plan des xy divisée par tang. θ ; d'où il suit que le point de rencontre des directions de ces deux forces est situé sur la paroi plane proposée. On nomme *centre de pression* le point dont il s'agit, qui est le point d'application de la résultante R des pressions normales supportées par la paroi.

3° On a $r=\frac{q}{\text{tang. }\theta}$, et par conséquent

$$R=\frac{q}{\sin.\theta}.$$

Le résultat précédent peut être exprimé d'une manière fort simple. Soit A l'aire de la figure proposée, et z_1 la distance du centre de gravité de cette figure à la surface supérieure du fluide. A sin. θ sera la projection de l'aire A sur le plan des xz, et z_1 sera également la distance du centre de gravité de cette projection à la surface supérieure du fluide. Ainsi l'on a

$$z_1=\frac{\int dx\int dz.z}{A\sin.\theta}=\frac{q}{\rho g A\sin.\theta}.$$

L'expression précédente de la pression normale supportée par la paroi plane revient donc à

$$R = \rho g A z_1, \quad \text{ou} \quad R = \Pi A z_1,$$

Π étant le poids de l'unité de volume du fluide ; c'est-à-dire que la pression supportée par l'aire plane A est égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base A, et pour hauteur la distance z_1 de son centre de gravité à la surface supérieure du fluide. Cette proposition se conclut d'ailleurs sans calcul du principe énoncé n° 374.

L'expression $\rho g A z$ ou $\Pi A z_1$ donne la valeur de la pression, quelle que soit l'inclinaison de la paroi plane. Si cette paroi est horizontale, le centre de pression coïncide avec le centre de gravité de l'aire A. Dans les autres cas l'on connaîtra le centre de pression en déterminant les deux distances de ce centre aux plans des xy et des yz, distances qui sont représentées par $\frac{\int dx \int dz . z^2}{\int dz \int x dz}$ et $\frac{\int dx . x \int dz . z}{\int dx \int dz . z}$, les intégrales étant prises entre les limites données par l'équation $z = \varphi(x)$ qui appartient à la projection verticale du contour de la paroi sur le plan des xz.

380. Lorsque la paroi plane est un rectangle vertical dont le côté supérieur est placé à la surface supérieure du fluide, on a, en désignant par a la longueur de ce côté et par c la longueur du côté vertical,

$$R = \rho g . ac . \frac{1}{2} c \quad \text{ou} \quad R = \frac{1}{2} \rho g . ac^2,$$

pour la pression supportée, et

$$\frac{2}{3}c,$$

pour la distance du centre de pression à la surface supérieure du fluide.

Lorsque la paroi est un triangle vertical dont le sommet est placé à la surface supérieure du fluide, et dont la base a est horizontale, la pression, en désignant par c la hauteur, est exprimée par

$$\rho g \frac{1}{2} ac^2 . \frac{2}{3} c \quad \text{ou} \quad \frac{1}{3} \rho g ac^3 ;$$

et comme on a $z = \frac{cx}{a}$, la formule $\frac{\int dx \int dz . z^2}{\int dx \int dz . z}$ donne $\frac{3}{4}c$ pour la distance du centre de pression à la surface supérieure du fluide.

Si la base du triangle vertical est au contraire placée à la surface supérieure du fluide, la pression est exprimée par

$$\rho g \frac{1}{2} ac^2 . \frac{1}{3} c \quad \text{ou} \quad \frac{1}{6} \rho g . ac^3;$$

et comme on a $z = c - \frac{cx}{a}$, la formule précédente donne $\frac{1}{2}c$ pour la distance du centre de pression à la surface supérieure du fluide. Le centre de pression est d'ailleurs placé dans tous les cas sur la ligne qui joint le sommet du triangle au milieu de la base.

381. Si, considérant toujours le cas d'une paroi plane, on veut avoir égard à la pression atmosphérique, la

valeur de la pression normale donnée n° 379 deviendra

$$(\Pi z_{,}+P)A.$$

Les distances du centre de pression aux plans des xy et des yz sont représentées par $\frac{\int dx \int dz.z\,(\Pi z+P)}{\int dx \int dz\,(\Pi z+P)}$ et $\frac{\int dx.x \int dz\,(\Pi z+P)}{\int dx \int dz\,(\Pi z+P)}$, les intégrales étant toujours prises entre les limites données par l'équation $z=\varphi\,(x)$ de la projection du contour de la paroi sur un plan vertical parallèle à l'intersection de cette paroi avec la surface supérieure du fluide.

XXVI. Équilibre des corps flottants a la surface des fluides pesants.

382. Considérons un fluide incompressible et pesant, supposé en équilibre, et dont la surface supérieure sera par conséquent un plan horizontal, conformément à ce qu'on a vu n° 374. Soit un corps solide pesant, de figure quelconque, plongé dans ce fluide. Il s'agit de reconnaître les conditions nécessaires pour que ce corps soit en équilibre, c'est-à-dire pour qu'il y ait destruction mutuelle entre l'action de la gravité sur le corps et les pressions exercées par le fluide sur toutes les parties de sa surface.

L'action de la gravité sur le corps se réduit toujours à une seule force égale au poids du corps, et dirigée suivant la verticale passant par son centre de gravité. Quant aux pressions exercées sur la surface du corps, on reconnaît en premier lieu par le n° 376, que les composantes horizontales de ces pressions auront toujours une résultante nulle; car quel que soit le plan

vertical sur lequel on projette cette surface, il y aura toujours deux parties qui se projetteront l'une sur l'autre et auxquelles répondront des pressions dirigées en sens opposés. On reconnaît en second lieu que les composantes verticales des pressions se composent en une force unique agissant de bas en haut, égale au poids du fluide déplacé par le corps, et dirigée suivant la verticale passant par le centre de gravité de ce fluide. En effet, deux éléments de la surface du corps, situés sur la même verticale, supportant toujours deux pressions dirigées, l'une de bas en haut, l'autre de haut en bas, dont la résultante, dirigée en sens contraire de la pesanteur est égale au poids du fluide contenu entre les deux éléments.

D'après ce qui précède, les conditions de l'équilibre se réduisent : 1° à ce que le poids du corps soit égal au poids du volume de fluide déplacé ; 2° à ce que le centre de gravité du corps et le centre de gravité de ce volume de fluide se trouvent situés dans une même ligne verticale.

Lorsque le corps et le fluide sont homogènes, le centre de gravité du corps et celui du fluide dont il tient la place coïncident toujours : la condition de l'équilibre se réduit à ce que le poids du corps et celui de ce fluide soient égaux.

383. Si le poids du corps est plus grand ou plus petit que celui du fluide dont il tient la place, il est sollicité à descendre ou à monter par une force verticale égale à la différence des deux poids. Le corps prend une position telle que les deux centres de gravité soient situés dans une même verticale qui est la direction de cette

force, et que le centre de gravité du corps soit au-dessous du centre de gravité du fluide dont il tient la place.

384. Considérons en second lieu un corps solide, en partie plongé dans un fluide incompressible. On verra comme ci-dessus que les composantes horizontales des pressions exercées par le fluide sur la surface de la partie plongée se détruisent toujours réciproquement; et que les composantes verticales de ces pressions ne diffèrent point de l'action de la gravité sur le fluide dont cette partie du corps occupe la place. Les conditions de l'équilibre d'un corps solide flottant à la surface d'un fluide pesant consistent donc : 1° en ce que le poids du corps soit égal au poids de la portion de fluide qu'il déplace ; 2° en ce que le centre de gravité du corps et celui du fluide dont il tient la place soient situés sur une même ligne verticale.

Si le corps et le fluide sont homogènes, le centre de gravité de la partie plongée du corps coïncide avec le centre de gravité du fluide déplacé par cette partie. La condition de l'équilibre se réduit à ce que le plan de flottaison partage le corps en deux parties dont les volumes soient entre eux dans le rapport de la densité du corps à l'excès de la densité du fluide sur celle du corps, et dont les centres de gravité soient situés sur une même perpendiculaire à ce plan.

Stabilité des corps flottants.

385. Un corps flottant à la surface d'un fluide est en équilibre lorsque les deux conditions énoncées dans le

numéro précédent sont satisfaites. L'équilibre est stable lorsque le corps ayant été dérangé très-peu, d'une manière quelconque, de sa position actuelle d'équilibre, puis abandonné à l'action des forces par lesquelles il est sollicité, ces forces tendent toujours à le ramener dans cette position.

Soient (fig. 40) AB la surface du fluide, A*m*B le corps flottant dans sa situation naturelle d'équilibre, F le centre de gravité du fluide que le corps déplace, et G le centre de gravité du corps. Ces deux points, d'après ce qu'on a vu dans le numéro précédent, se trouveront nécessairement dans une même verticale EG, et l'équilibre du corps flottant n'est autre chose que l'équilibre d'une force égale au poids du corps agissant de haut en bas au point G, qui est détruite par une force égale, agissant de bas en haut au point F.

Admettons que l'on change la position actuelle du corps flottant, en sorte que le centre de gravité G soit transporté en G′, et la ligne EG en E′G′. Soit, après ce changement, F′ la position du centre de gravité du fluide déplacé. On devra maintenant regarder le corps flottant comme étant soumis à l'action de deux forces verticales, l'une agissant de haut en bas en G′, qui est toujours égale au poids du corps; l'autre agissant de bas en haut en F′ qui est égale au poids du fluide déplacé. L'action de ces deux forces tendra toujours; 1° à faire mouvoir verticalement le centre de gravité G′ du corps de bas en haut ou de haut en bas, suivant que le déplacement sera plus grand ou plus petit qu'il n'était dans la situation naturelle d'équilibre; 2° à faire tourner le corps flottant autour d'un axe horizontal passant par le

point G′ et perpendiculaire au plan vertical qui contient les points G′ et F′. Concevons le plan incliné qui contiendrait cet axe horizontal et la ligne E′G′, et que nous supposerons perpendiculaire au plan de la figure. Il est visible que si la ligne E′G′ étant inclinée à droite, comme le représente la figure, le point F′ se trouve à droite du point G′, la force égale au poids du fluide déplacé, qui agit de bas en haut en F′ tendra à ramener la ligne E′G′ vers la verticale ; tandis que si le point F′ se trouvait à gauche du point G′, la même force tendrait à faire incliner de plus en plus la ligne E′G′ vers la droite. Ou, si l'on veut, concevant par le point F′ une ligne verticale qui rencontre en μ le plan perpendiculaire au plan de la figure dont on a parlé ci-dessus et dont E′G′ est la trace, si le point μ se trouve au-dessus de G′ le corps tendra à se redresser, tandis que si le point μ se trouve au-dessous de G′ le corps tendra à s'incliner de plus en plus dans le même sens. Le point μ a été nommé, d'après Bouguer, *Métacentre*.

Si le centre de gravité du corps, que nous avons supposé en G dans l'état naturel d'équilibre, avait été placé en g, et s'était transporté en g' par l'effet du déplacement attribué au corps, le métacentre μ se trouverait au-dessous de g', et le corps flottant tendrait à s'incliner de plus en plus. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, il peut résulter du seul changement de la position du centre de gravité du corps flottant, que ce corps se trouve sollicité à revenir à sa position naturelle d'équilibre ou à s'en écarter.

Concevons que le corps flottant ait été écarté de sa position naturelle d'équilibre, puis abandonné à l'ac-

tion des forces qui le sollicitent. Il est visible que si, pour toutes les situations possibles de ce corps, le métacentre est au-dessus du centre de gravité, les forces tendront toujours à ramener le corps à sa situation naturelle d'équilibre, et par conséquent son équilibre sera stable. Si au contraire, pour toutes les situations possibles du corps flottant, le métacentre est au-dessous du centre de gravité, les forces tendront toujours à écarter davantage le corps de sa situation d'équilibre; et par conséquent son équilibre sera instable. Mais comme le métacentre peut se trouver tantôt au-dessus, tantôt au-dessous du centre de gravité, suivant la position actuelle du corps flottant, on ne peut en général déterminer exactement les conditions de la stabilité de l'équilibre sans rechercher la nature des mouvements affectés par ce corps.

386. Lorsque le déplacement du corps est supposé très-petit, on peut exprimer d'une manière générale les conditions relatives à la figure du corps, ou à la distribution des poids dont il est chargé, dont dépendent la stabilité ou l'instabilité de son équilibre. Nous ferons ici abstraction du mouvement du fluide, et nous admettrons qu'il exerce constamment sur le corps, la même action qui aurait lieu si le corps était immobile. D'après ce qui a été dit dans l'article XX, on pourra toujours considérer à part: 1° le mouvement du centre de gravité du corps, qui aura lieu comme si toute la masse était concentrée en ce point, et comme si toutes les forces y étaient appliquées; 2° la rotation du corps autour de son centre de gravité qui aura lieu comme si ce point était fixe.

AB étant toujours la surface supérieure du fluide (fig. 41), soient, comme ci-dessus, G la position du centre de gravité du corps dans l'état naturel d'équilibre, EG la verticale qui passe par ce point, F la position sur cette verticale du centre de gravité du fluide déplacé par le corps. Nous prenons le point G pour origine des coordonnées horizontales x, y et verticales z, les z positives étant comptées de haut en bas. Nous admettons ensuite que le corps flottant a été déplacé, en sorte que le centre de gravité G s'est abaissé en G′ sans sortir de la verticale où il était situé, que la ligne EG s'est placée en E′G′, et que le point F s'est transporté en f sur cette ligne, la distance fG′ étant égale à FG. Le plan de flottaison, qui coïncidait dans l'état naturel d'équilibre avec AB, s'est abaissé et incliné en demeurant perpendiculaire à E′G′, et sa trace sur le plan des xz est maintenant ab, la distance Gc étant égale à GG′ en négligeant une quantité très-petite du second ordre. Enfin nous désignerons par

υ le volume du fluide déplacé par le corps dans l'état naturel d'équilibre;

Ω l'aire du plan de flottaison AB;

a, b les coordonnées du centre de gravité de l'aire Ω comptées du point G sur les axes des x et des y;

c la distance GF ou G′f des deux centres de gravité du corps et du fluide déplacé dans l'état naturel d'équilibre du corps flottant (on a supposé dans la figure G au-dessous de F; s'il était au-dessus, il faudrait changer dans les formules le signe de c);

ζ la hauteur verticale très-petite GG′ ou Cc dont le centre de gravité G est abaissé au-dessous de sa position dans l'état naturel d'équilibre;

φ, ω, ψ les angles très-petits que la ligne EG a décrits autour des axes des x, des y et des z, pour arriver à sa position actuelle. (On suppose ici les angles φ et ω positifs, lorsque les mouvements de rotation qui ont lieu autour des axes des x et des y ont tous deux pour effet d'abaisser les points du plan de flottaison qui sont situés dans l'angle des x et des y positives);

ρ la masse de l'unité de volume de fluide;

g la vitesse imprimée par la gravité dans l'unité de temps.

Le déplacement du corps étant supposé très-petit, les quantités Ω, a, b peuvent être censées constantes pendant toute la durée du mouvement.

Il s'agit en premier lieu de distinguer les forces par lesquelles le corps flottant est sollicité dans sa position actuelle. Elles consistent évidemment : 1° dans le poids de ce corps, exprimé par $\rho g \Upsilon$, qui agit verticalement de haut en bas en G′; 2° dans une force égale au poids du fluide déplacé dans l'état naturel d'équilibre, également exprimée par $\rho g \Upsilon$, agissant verticalement de bas en haut en f; 3° dans le poids du fluide contenu entre les deux plans AB et ab, qu'il faut concevoir agissant aussi de bas en haut. Quant aux pressions horizontales exercées sur la surface du corps, elles se détruisent dans tous les sens, et on ne doit point les considérer. Pour établir les équations du mouvement

du corps, nous devons exprimer en fonction des quantités ζ, φ, ω, ψ les forces qui viennent d'être indiquées, et leurs moments pris par rapport aux axes des coordonnées.

Relativement à la force $\rho g \Upsilon$, agissant verticalement de bas en haut en f, les moments de cette force pour faire tourner le corps autour de deux parallèles aux axes des x et des y, et passant par le centre de gravité G′ sont évidemment

$$\rho g \Upsilon . c\varphi \quad \text{et} \quad \rho g \Upsilon . c\omega .$$

A l'égard du poids du fluide contenu entre les deux plans de flottaison AB et ab, il faut observer que prenant sur le plan AB un point dont les coordonnées horizontales sont x, y, la longueur de la verticale abaissée de ce point jusqu'à la rencontre du plan ab, sera $\zeta + x\omega + y\varphi$. Par conséquent le poids de ce fluide est

$$\rho g \int\int dxdy\,(\zeta + x\omega + y\varphi)\,;$$

et les moments de ce poids pris par rapport à l'axe des x et à l'axe des y sont respectivement

$$\rho g \int\int dxdy\,.\,y(\zeta + x\omega + y\varphi),$$

$$\rho g \int\int dxdy\,.\,x(\zeta + x\omega + y\varphi)\,;$$

les intégrales étant prises dans toute l'étendue du plan de flottaison AB. Si l'on fait attention que $\int\int dxdy = \Omega$, $\int\int dxdy\,.\,y = \Omega b$, $\int\int dxdy\,.\,x = \Omega a$; et si l'on pose pour abréger

$$\iint dxdy.xy = l\,, \qquad \iint dxdy.y^2 = m\,, \iint dxdy.x^2 = n\,;$$

l'expression précédente du poids du fluide contenu entre les plans AB et ab deviendra

$$\rho g\Omega(\zeta + a\omega + b\varphi)\,;$$

et les expressions des moments de ce poids pris par rapport aux axes parallèles aux x et aux y, qui passent par le centre de gravité deviendront respectivement

$$\rho g(\Omega b\zeta + l\omega + m\varphi)\,,$$
$$\rho g(\Omega a\zeta + n\omega + l\varphi).$$

Les quantités l, m, n peuvent être censées constantes, pendant toute la durée du mouvement.

On voit donc par ce qui précède: 1° que si l'on transporte toutes les forces au centre de gravité G', il restera seulement une force verticale agissant de bas en haut, égale à

$$\rho g\Omega(\zeta + a\omega + b\varphi)\,,$$

2° que les moments des forces qui tendent à faire tourner le système autour de l'axe parallèle aux x et autour de l'axe parallèle aux y, de manière à faire diminuer les angles φ et ω, sont respectivement

$$\rho g[\Omega b\zeta + l\omega + (\Upsilon c + m)\varphi]\,,$$
$$\rho g[\Omega a\zeta + (\Upsilon c + n)\omega + l\varphi].$$

Quant au moment qui tendrait à faire tourner le système autour de l'axe des z, sa valeur est nulle, puisque les forces horizontales se détruisent dans tous les sens.

387. D'après cela, le corps flottant étant supposé en

mouvement, et les valeurs des quantités $\zeta, \varphi, \omega, \psi$, qui entrent dans les formules précédentes, étant supposées celles qui ont lieu à la fin du temps t, le mouvement du centre de gravité, conformément à ce qu'on a vu dans le n° 312, est réglé par la seule équation

$$\Upsilon\frac{d^2\zeta}{dt^2}=-g\Omega(\zeta+a\omega+b\varphi);$$

et le mouvement de rotation du corps autour de son centre de gravité est déterminé d'après le même numéro par les équations

$$S.m\left(z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\rho g[\Omega b\zeta+l\omega+(\Upsilon c+m)\varphi],$$

$$S.m\left(x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}\right)=-\rho g[\Omega a\zeta\Upsilon+(c+n)\omega+l\varphi],$$

$$S.m\left(y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0.$$

D'après les formules du n° 249, où l'on doit changer les signes de z et de ω,

$dx=yd\psi-zd\omega$, et par conséquent $\frac{d^2x}{dt^2}=y\frac{d^2\psi}{dt^2}-z\frac{d^2\omega}{dt^2}$,

$dy=-zd\varphi-xd\psi$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-z\frac{d^2\varphi}{dt^2}-x\frac{d^2\psi}{dt^2}$,

$dz=xd\omega+yd\varphi$, $\frac{d^2z}{dt^2}=x\frac{d^2\omega}{dt^2}+y\frac{d^2\varphi}{dt^2}$,

puisque, les déplacements étant supposés très-petits, les coordonnées de chaque point du corps peuvent être censées constantes par rapport au temps. Substituant ces expressions dans les trois équations du mouvement de rotation, et posant comme dans le n° 285,

$$A = S.m(y^2+z^2), \qquad F = S.myz,$$
$$B = S.m(x^2+z^2), \qquad G = S.mxz,$$
$$C = S.m(x^2+y^2), \qquad H = S.mxy;$$

il viendra

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + G\frac{d^2\psi}{dt^2} + H\frac{d^2\omega}{dt^2} = -\rho g[\Omega b\zeta + l\omega + (\Upsilon c + m)\varphi],$$
$$B\frac{d^2\omega}{dt^2} + H\frac{d^2\varphi}{dt^2} - F\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\rho g[\Omega a\zeta + (\Upsilon c + n)\omega + l\varphi],$$
$$C\frac{d^2\psi}{dt^2} - F\frac{d^2\omega}{dt^2} + G\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0.$$

Les quatre équations précédentes doivent donner les expressions des quantités ζ, φ, ω, ψ en fonction de t. Comme elles sont linéaires et à coefficients constants, on pourra toujours les intégrer par les procédés indiqués dans les n°s 455 et suivants des *Leçons d'Analyse*.

388. Nous supposerons, conformément à l'état ordinaire des bâtiments de mer, que le corps flottant peut être partagé en deux parties égales et symétriques par un plan vertical.

Admettant que ce plan soit celui des yz, on aura donc $a = 0$, $l = 0$, $G = 0$, $H = 0$; ce qui réduit les quatre équations trouvées ci-dessus à

$$\Upsilon\frac{d^2\zeta}{dt^2} = -g\Omega(\zeta + b\varphi) \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\rho g[\Omega b\zeta + (\Upsilon c + m)\varphi] \quad (2),$$
$$B\frac{d^2\omega}{dt^2} - F\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\rho g(\Upsilon c + n)\omega \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$
$$C\frac{d^2\psi}{dt^2} - F\frac{d^2\omega}{dt^2} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Considérons les équations (1) et (2) qui, en posant pour abréger

$$S=\frac{g\Omega}{\gamma},\quad T=\frac{g\Omega b}{\gamma},\quad S'=\frac{\rho g\Omega b}{A},\quad T'=\frac{\rho g(\gamma c+m)}{A},$$

s'écriront

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+S\zeta+T\varphi=0,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+S'\zeta+T'\varphi=0.$$

Multipliant la seconde par une constante indéterminée λ, et l'ajoutant à la première, il vient

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\lambda\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(S+\lambda S')\zeta+(T+\lambda T')\varphi=0;$$

puis en posant, u étant une nouvelle variable, $\zeta=u-\lambda\varphi$,

d'où $$\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d^2u}{dt^2}-\lambda\frac{d^2\varphi}{dt},$$

on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(S+\lambda S')u-(S+\lambda S')\lambda\varphi+(T+\lambda T')\varphi=0.$$

On satisfait à cette équation en posant

$$\frac{d^2u}{dt^2}+(S+\lambda S')u=0,$$
$$(S+\lambda S')\lambda-(T+\lambda T')=0.$$

La seconde de ces deux équations donne

$$\lambda=\frac{-S+T'\pm\sqrt{(S-T')^2+4TS'}}{2S'};$$

en substituant cette valeur dans la première et faisant pour abréger

$$K=\frac{1}{2}\left(S+T'\pm\sqrt{(S-T')^2+4TS'}\right),$$

il viendra

$$\frac{d^2u}{dt^2}+Ku=0,$$

équation dont l'intégrale est

$$u=\Gamma\cos.t\sqrt{K}+\Delta\sin.t\sqrt{K},$$

Γ et Δ étant les deux constantes arbitraires.

Si l'on suppose qu'à l'origine du mouvement la vitesse du corps flottant soit nulle, on aura alors $\frac{d\zeta}{dt}=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$, et par conséquent $\frac{du}{dt}=0$; en sorte que la contante Δ devra être nulle. Nous écrirons donc

$$u=\Gamma_1\cos.t\sqrt{K_1} \quad \text{et} \quad u=\Gamma_2\cos.t\sqrt{K_2},$$

en désignant par K_1 et K_2 les deux valeurs de K; et par conséquent

$$\zeta+\lambda_1\varphi=\Gamma_1\cos.t\sqrt{K_1}$$
$$\zeta+\lambda_2\varphi=\Gamma_2\cos.t\sqrt{K_2},$$

en désignant également par λ_1 et λ_2 les deux valeurs de λ; d'où l'on déduit

$$\zeta=\frac{\Gamma_2\lambda_2\cos.t\sqrt{K_1}-\Gamma_1\lambda_1\cos.t\sqrt{K_2}}{\lambda_2-\lambda_1}\ldots\ldots (5),$$

$$\varphi=\frac{\Gamma_1\cos.t\sqrt{K_1}-\Gamma_2\cos.t\sqrt{K_2}}{\lambda_1-\lambda_2}\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Il est visible d'ailleurs qu'en représentant par ζ_0 et φ_0,

les valeurs initiales de ζ et φ, on aura

$$\zeta_0+\lambda_1\varphi_0=\Gamma_1 \qquad \text{et} \qquad \zeta_0+\lambda_2\varphi_0=\Gamma_2\,,$$

pour les valeurs des deux constantes Γ_1 et Γ_2.

Quant à l'équation (3), que l'équation (4) réduit à

$$\frac{d^2\omega}{dt^2}+\frac{\rho g(\Upsilon c+n).C}{BC-F}\,\omega=0\,,$$

elle donne immédiatement

$$\omega=\omega_0\cos t\sqrt{\frac{\rho g(\Upsilon c+n).C}{BC-F^2}}\,,\ldots\ldots\ (7)$$

en supposant toujours la valeur initiale de $\frac{d\omega}{dt}$ nulle, et désignant par ω_0 la valeur initiale de ω.

Enfin, mettant cette valeur de ω dans l'équation (4), il viendra

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=\frac{F}{C}\omega_0.\frac{\rho g(\Upsilon c+n)C}{BC-F^2}\cos.t\sqrt{\frac{\rho g(\Upsilon c+n)C}{BC-F^2}}\,;$$

intégrant deux fois de suite, supposant la valeur initiale de $\frac{d\psi}{dt}$ nulle, et représentant par ψ_0 la valeur initiale de ψ, on trouve

$$\psi=\psi_0+\frac{F}{C}\omega_0\left(1-\cos.t\sqrt{\frac{\rho g(\Upsilon c+n)C}{BC-F^2}}\right)\ldots\ldots\ (8)$$

Les équations (5), (6), (7), (8), qui donnent les valeurs des quatre variables ζ, φ, ω et ψ en fonction du temps t, font connaître le mouvement du corps flottant. Si les radicaux qui multiplient t sous le signe cosinus sont réels, ou si les quantités sous le signe $\sqrt{\ }$ sont positives, ces mouvements ne consisteront évidemment qu'en des oscillations qui auront lieu de part et

d'autre de la position naturelle d'équilibre du corps. Le corps ne s'écartera jamais de cette position plus qu'il n'en était écarté à l'origine du mouvement, et l'équilibre sera stable. Mais si les quantités dont il s'agit sont négatives, le corps tendra à s'écarter de plus en plus de sa position initiale. Ainsi la stabilité ou l'instabilité de l'équilibre tient aux signes des quantités K_1 et K_2, et à celui de la quantité $\frac{\Upsilon c+n}{BC-F^2}$. L'une des valeurs de K est toujours positive, et l'on peut reconnaître que l'autre sera aussi positive pourvu que la quantité $\Upsilon c+m$ soit plus grande que Ωb^2. Ainsi la condition de la stabilité de l'équilibre s'exprime en posant

$$\Upsilon c+m>\Omega b^2 \quad \text{et} \quad \frac{\Upsilon c+n}{BC-F^2}>0.$$

On peut remarquer que la figure des bâtiments de mer, qui est symétrique par rapport au plan qui les coupe dans le sens de la longueur, s'éloigne peu d'être aussi symétrique par rapport à un plan perpendiculaire à celui-ci. Il y a donc en général peu d'erreur, dans ce genre d'applications, à supposer que le plan des xz partage le corps flottant en deux parties à peu près égales, et à regarder en conséquence b et F comme des quantités dont on peut négliger les quarrés. Le signe d'une des valeurs de la quantité K, qui entre sous le signe radical dans les équations (5) et (6), dépendrait alors entièrement du signe de la quantité $\Upsilon c+m$: les deux valeurs de K seraient positives si $\Upsilon c+m$ était positive, et l'une de ces valeurs serait négative dans le cas contraire. On reconnaît également que le radical des équations (7) et (8) serait réel ou imaginaire, suivant

que la quantité $\Upsilon c+n$ serait positive ou négative. Ainsi l'équilibre du corps flottant serait stable si les quantités $\Upsilon c+m$ et $\Upsilon c+n$ étaient toutes deux positives, et il serait instable si l'une d'entre elles on si toutes deux étaient négatives.

Les quantités m et n sont toujours positives, aussi bien que Υ. La quantité c est positive lorsque le centre de gravité du corps est au-dessous de celui du fluide déplacé dans l'état naturel d'équilibre, comme on l'a supposé dans la figure: alors les quantités $\Upsilon c+m$ et $\Upsilon c+n$ sont toujours positives, et par conséquent l'équilibre est toujours stable. Mais si le centre de gravité du corps est situé plus haut que celui du fluide déplacé dans l'état naturel d'équilibre, la stabilité de l'équilibre exige que Υc soit plus petite que m et n.

389. La recherche serait d'ailleurs plus simple si l'on supposait d'avance que le plan des xz partage le corps flottant, aussi bien que le plan des yz, en deux parties égales et symétriques. En faisant $b=0$ et $F=0$ dans les équations (1), (2), (3) et (4) du numéro précédent, elles se réduisent à

$$\Upsilon \frac{d^2z}{dt^2} = -g\Omega\zeta,$$

$$A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\rho g(\Upsilon c+m)\varphi,$$

$$B \frac{d^2\omega}{dt^2} = -\rho g(\Upsilon c+n)\omega,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0.$$

Dans ces équations, que l'on aurait pu obtenir directement, les variables sont séparées, et l'on a immé-

diatement (en supposant toujours les vitesses initiales nulles),

$$\zeta = \zeta_0 \cos . t \sqrt{\frac{g\Omega}{\Upsilon}},$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos . t \sqrt{\frac{\rho g(\Upsilon c + m)}{A}},$$

$$\omega = \omega_0 \cos . t \sqrt{\frac{\rho g(\Upsilon c + n)}{B}},$$

$$\psi = \psi_0.$$

On peut alors affirmer avec une entière exactitude que l'équilibre du corps flottant est stable ou instable suivant que les quantités $\Upsilon c + m$ et $\Upsilon c + n$, sont ou non toutes deux positives ; et il est utile de remarquer que ces quantités étant multipliées par le poids ρg de l'unité de volume du fluide expriment respectivement les moments des forces qui tendent à ramener l'axe du corps flottant dans sa situation verticale primitive, le déplacement de ce corps étant supposé égal à celui qui a lieu dans cette situation. D'où l'on doit conclure que les quantités $\Upsilon c + m$ et $\Upsilon c + n$ seront positives ou négatives, suivant que le métacentre déterminé en supposant cette condition satisfaite, se trouvera placé au-dessus ou au-dessous du centre de gravité du corps flottant; et par conséquent que la seule considération du métacentre ainsi déterminé suffit, dans le cas particulier que nous considérons, pour prononcer si l'équilibre du corps flottant est stable ou instable.

Les oscillations que le corps flottant exécute dans le sens vertical et autour des deux axes principaux qui se croisent à son centre de gravité sont ici entièrement

indépendantes les unes des autres. Les durées des oscillations seront exprimées respectivement, d'après les expressions précédentes, par

$$\pi\sqrt{\frac{\Upsilon}{g\Omega}},\quad \pi\sqrt{\frac{A}{\rho g(\Upsilon c+m)}},\quad \pi\sqrt{\frac{B}{\rho g(\Upsilon c+n)}},$$

π représentant le rapport de la circonférence au diamètre. La comparaison de ces valeurs dans divers bâtiments de mer, peut faire juger de la douceur ou de la dureté de leurs mouvements.

390. Pour donner une application très-simple de ces résultats, nous supposerons que le corps flottant est un parallélipipède rectangle homogène, dont la densité est la moitié de celle du fluide, et nous considérerons seulement les positions d'équilibre dans lesquelles l'une des arêtes est verticale, les deux autres horizontales, et le plan de flottaison passe par le centre du corps. Il s'agit de distinguer dans quels cas l'équilibre sera stable ou non. En conservant les dénominations précédentes, désignons par a, b, c les demi-longueurs des trois arêtes dirigées parallèlement aux axes des x, des y et des z, dans l'état naturel d'équilibre. Le volume de fluide déplacé dans cet état est la moitié de celui du corps : donc

$$\Upsilon=4abc.$$

Le centre de gravité du corps est au niveau de la surface supérieure du fluide, et le centre de gravité du fluide déplacé est à la distance $\frac{1}{2}c$ au-dessous de cette surface : donc la quantité c des formules précédentes, doit être remplacée par $-\frac{1}{2}c$.

Nous aurons d'ailleurs

$$m=\int_{-a}^{a}dx\int_{-b}^{b}dy\,.\,y^2=\frac{4}{3}ab^3 \quad n=\int_{-a}^{a}dx\,.\,x^2\int_{-b}^{b}dy=\frac{4}{3}a^3b.$$

Ainsi

$$\gamma c+m=4ab\left(-\frac{c^2}{2}+\frac{b^2}{3}\right)$$

$$\gamma c+n=4ab\left(-\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{3}\right);$$

d'où l'on conclut que l'équilibre du corps ne peut être stable, à moins que l'arête verticale ne soit moindre que la plus petite des arêtes horizontales multipliée par la fraction $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Il ne peut y avoir qu'une seule position d'équilibre stable.

Quant à la durée des oscillations qui auront lieu autour de cette position, on remarquera que, d'après le n° 296, les moments d'inertie du corps, pris par rapport aux axes des x et des y qui passent par le centre de gravité, seront respectivement

$$A=\frac{4}{3}\rho\,abc(b^2+c^2), \qquad B=\frac{4}{3}\rho\,abc(a^2+c^2),$$

ρ désignant toujours la densité du fluide, qui est supposée ici double de celle du corps flottant. De plus

$$\Omega=4ab.$$

Ces valeurs substituées dans les expressions précédentes, donneront

$$\pi\sqrt{\frac{c}{g}}, \quad \pi\sqrt{\frac{c}{g}\cdot\frac{b^2+c^2}{b^2-\frac{3}{2}c^2}}, \quad \pi\sqrt{\frac{c}{g}\cdot\frac{a^2+c^2}{a^2-\frac{3}{2}c^2}},$$

pour les durées respectives des oscillations très-petites qui auront lieu dans le sens vertical, autour de l'axe horizontal parallèle à l'arête $2a$ et autour de l'axe horizontal parallèle à l'arête $2b$. On voit que la durée des oscillations verticales est égale à celle des oscillations d'un pendule simple dont la longueur est c.

XXVII. ÉQUILIBRE D'UNE COLONNE ATMOSPHÉRIQUE. NIVELLEMENT BAROMÉTRIQUE.

391. Considérons en premier lieu un fluide élastique homogène contenu dans un vase et soumis à l'action de la gravité, que l'on regarde comme une force verticale constante. Admettons de plus que la température soit uniforme dans toute l'étendue du fluide, ce qui permettra d'écrire comme dans le n° 369, conformément à la loi de Mariotte,

$$p = k\rho,$$

p désignant la pression qui a lieu dans un point quelconque, ρ la densité du fluide en ce point, et k un coefficient constant. Le résultat énoncé dans le numéro cité donnera la loi de l'équilibre du fluide, en remarquant que z désignant l'ordonnée verticale d'un point quelconque comptée de bas en haut à partir d'un plan horizontal fixe, on a ici $\Pi = -gz$, et par conséquent

$$p = \mathrm{A}.e^{-\frac{gz}{k}}, \quad \text{ou} \quad z = \frac{k}{g}\log.\frac{\mathrm{A}}{p},$$

A étant une constante arbitraire. Et si l'on nomme P la pression qui répond au point dont l'ordonnée verticale est Z, on aura

$$p = A.e^{\frac{g}{k}(Z-z)}, \quad \text{ou} \quad z - Z = \frac{k}{g} \log. \frac{P}{p}.$$

Cette équation donnant pour z une valeur infinie lorsqu'on fait $P=o$, on voit que l'on ne peut supposer qu'aucune pression n'est exercée sur la surface supérieure du fluide, sans admettre en même temps que la hauteur de la colonne de fluide est infinie. Mais comme la densité devient nulle en même temps que la pression, il faut seulement entendre par ce résultat que l'on ne peut spécifier la hauteur à laquelle se termine le fluide.

392. Considérons maintenant plusieurs gaz ou vapeurs soumis à l'action de la gravité et contenus dans un même vase, en supposant comme ci-dessus la température constante. On sait, par les recherches des physiciens : 1° que ces fluides, parvenus à un état d'équilibre, se trouveront mélangés complétement de manière à former un corps homogène ; 2° que, dans cet état, chaque fluide supporte une partie de la pression totale égale à celle qu'il supporterait s'il remplissait seul le même espace. Soient, pour un point quelconque, ρ_1, ρ_2, ρ_3, etc., les densités des fluides qui forment le mélange ; p_1, p_2, p_3, etc., les parties de la pression qu'ils supportent respectivement. On aura

$$p_1 = k_1\rho_1, \quad p_2 = k_2\rho_2, \quad p_3 = k_3\rho_3, \text{ etc.},$$

k_1, k_2, k_3, etc., désignant des coefficients constants, et

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \text{etc.}$$

La densité ρ du mélange sera évidemment la somme $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \text{etc.}$ des densités de chaque gaz. Donc ici l'équation $p = k\rho$ devient

$$k_1\rho_1+k_2\rho_2+k_3\rho_3+\text{etc.}=k(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\text{etc.}),$$

d'où

$$k=\frac{k_1\rho_1+k_2\rho_2+k_3\rho_3+\text{etc.}}{\rho_1+\rho_2+\rho_3+\text{etc.}}.$$

Cette expression de k doit être substituée dans la formule du n° 391, qui devient ainsi

$$z-Z=\frac{k_1\rho_1+k_2\rho_2+k_3\rho_3+\text{etc.}}{(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\text{etc.})g}.\log.\frac{P}{p},$$

quand on veut l'appliquer à un mélange de plusieurs gaz.

393. Nous avons supposé qu'il s'agissait d'un fluide contenu dans un vase; mais si l'on voulait considérer l'équilibre d'un fluide occupant un grand espace, ou même l'équilibre de l'atmosphère terrestre dans toute son étendue, il est visible par les n°s 368 et suivants, que les résultats précédents pourraient être appliqués, en supposant la direction commune de la gravité et des ordonnées z perpendiculaire à la surface des eaux, qui est nécessairement ici une surface de niveau. Ces résultats donnent l'expression de la différence de niveau de deux points quelconques du fluide au moyen du rapport des pressions qui ont lieu respectivement dans ces deux points. Mais comme les formules précédentes sont fondées sur l'hypothèse d'une température constante, et d'une action constante exercée par la gravité, hypothèses qui ne s'accordent point avec l'état véritable de l'atmosphère, elles ne peuvent être employées à la mesure des hauteurs par l'observation du baromètre.

394. Pour établir les formules dont cette mesure exige

l'usage, on doit reprendre l'équation différentielle du n° 368, $dp = \rho g . d\Pi$, qui devient ici

$$dp = -\rho g . dz ;$$

et intégrer cette équation en ayant égard aux variations de la gravité, de la température, et de la composition du fluide atmosphérique.

L'intensité de la gravité varie avec la latitude et avec la hauteur au-dessus du niveau des mers. Nommant

R le rayon moyen de la terre = 6366198^m ;

L la latitude du lieu comptée de l'équateur ;

z la hauteur du lieu au-dessus du niveau de la mer ;

g la vitesse imprimée par la gravité aux corps pesants à la latitude de 45° et au niveau de la mer ;

on a généralement

$$g\left(\frac{R}{R+z}\right)^2 (1 - 0{,}002837 . \cos . 2L)$$

pour l'expression de la vitesse imprimée par cette force.

395. Quant à la valeur de la densité ρ du fluide atmosphérique, nous nommerons

ϖ le poids du mètre cube de mercure à la température de 0°, au niveau de la mer et à la latitude moyenne de 45° ;

Π le poids du mètre cube d'air pur dans les mêmes circonstances, sous une pression égale à ϖ (0,76) pour un mètre quarré ;

et nous rappellerons que, d'après les lois combinées de Mariotte et de Gay-Lussac, le poids du mètre cube d'air atmosphérique deviendra, dans le même lieu, sous la température t et la pression p,

$$\text{II}\ \frac{p}{\varpi\,(0,76)}\ \frac{1}{1+0,00375.t}.$$

Cette expression suffirait si le fluide atmosphérique pouvait être regardé comme formé d'air pur. Mais il est nécessaire d'avoir égard à la vapeur aqueuse dont il est presque toujours mélangé.

On sait qu'à températures et à pressions égales, la pesanteur spécifique de la vapeur aqueuse est les 0,624 de celle de l'air. Considérons donc un mélange d'air et de vapeur aqueuse : soient v la température, p la pression supportée par le mélange, $p-f$ la partie de cette pression supportée par l'air, et f la partie supportée par la vapeur aqueuse. On aura, pour le poids du mètre cube de l'air,

$$\text{II}\ \frac{p-f}{(0,76)}\ \frac{1}{1+0,00375.v},$$

pour le poids du mètre cube de la vapeur aqueuse

$$0,624\ \text{II}\ \frac{f}{\varpi\,(0,76)}\ \frac{1}{1+0,00375.v};$$

et pour le poids du mètre cube du mélange

$$\text{II}\ \frac{p-0,376.f}{\varpi\,(0,76)}\ \frac{1}{1+0,00375.v}.$$

Si ce mélange était saturé de vapeur, f serait la pression correspondante à la température v dans la table donnant la force élastique acquise par la vapeur aqueuse au maximum de densité sous diverses températures.

396. La formule précédente exprime le poids du mètre cube de fluide atmosphérique considéré comme un mélange d'air et de vapeur à la latitude de 45° et au niveau de la mer. Si l'on se trouvait dans un tel lieu l'on devrait

de la mer, et par P et p les pressions correspondantes, il viendra

$$\log.\frac{P}{p}=\frac{\Pi(1-0,001267)}{0,76.\varpi}(1-0,002837.\cos.2L)\frac{1}{1+0,002(V+v)}\frac{z-Z}{1+\frac{z+Z}{R}},$$

en négligeant les termes qui sont divisés par le quarré de R. Le logarithme du premier membre est un logarithme népérien, et on doit le multiplier par M=2,302585 si on le prend dans les tables ordinaires.

398. L'équation précédente donnera la différence de niveau $z-Z$ en fonction du rapport $\frac{P}{p}$ des pressions qui ont lieu respectivement aux deux points que l'on considère. Il reste maintenant à déduire ce rapport de l'observation du baromètre. Désignons par H et h les hauteurs du baromètre observées dans ces deux points, par U et u les températures des colonnes de mercure, qui diffèrent en général des températures de l'air désignées ci-dessus par V et v. Comme le mercure se dilate dans l'intervalle de 0° à 100° de $\frac{1}{55,50}$, le poids du mètre cube de mercure au niveau de la mer sous la latitude de 45° et à la température u sera $\frac{\varpi}{1+\frac{u}{5550}}$, ou, à fort peu près, $\varpi\left(1-\frac{u}{5550}\right)$. Le même poids, sous la latitude L et à la distance $R+z$ du centre de la terre, devient

$$\varpi(1-0,002837.\cos.2L)\left(1-\frac{u}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z)^2}.$$

Ainsi, l'on a

$$p = h.\varpi(1-0{,}002837.\cos.2L)\left(1-\frac{u}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+z)^2},$$

$$P = H.\varpi(1-0{,}002837.\cos.2L)\left(1-\frac{U}{5550}\right)\frac{R^2}{(R+Z)^2};$$

et par conséquent, en développant les fractions et négligeant les quantités très-petites du second ordre,

$$\frac{P}{p} = \frac{H}{h}\left(1+\frac{u-U}{5550}\right)\left(1+\frac{z-Z}{R}\right)^2.$$

Cette expression doit être substituée dans l'équation précédente. En effectuant cette substitution, et remarquant que x étant un très-petit nombre, le logarithme népérien de $1+x$ est à fort peu près égal à x, et le logarithme tabulaire à $0{,}434295.x$; on trouvera

$$z-Z = \frac{0{,}76.M.\varpi}{(1-0{,}001267)\Pi}(1+0{,}002837.\cos.2L)$$

$$[1+0{,}002(v+V)]\left(1+\frac{z+Z}{R}\right)\left[\log\frac{H}{h}+0{,}434295\left(\frac{u-U}{5550}+2\frac{z-Z}{R}\right)\right].$$

Le logarithme du second membre doit être pris dans les tables ordinaires. Le facteur $\frac{0{,}76.M.\varpi}{(1-0{,}001267)\Pi}$, où M représente le nombre 2,302585, est un coefficient constant dont on peut déterminer la valeur d'après le rapport connu des poids ϖ, Π du mercure et de l'air atmosphérique pris à la latitude de 50°, à la température 0°, et sous la pression de $0^m,76$. D'après les expériences de MM. Biot et Arago, on a $\frac{\varpi}{\Pi}=10466{,}8$, ce qui donne pour la valeur du coefficient dont il s'agit

$$\frac{0^m,76.M.\varpi}{(1-0,001267)\,\Pi} = 18339^m,8.$$

La valeur du même coefficient pouvait être aussi déterminée en appliquant la formule précédente à des observations barométriques faites dans des lieux dont les différences de niveau étaient connues par d'autres procédés. C'est effectivement de cette manière qu'avant même l'évaluation exacte du rapport des poids spécifiques de l'air et du mercure, les observations faites par M. Ramond dans les Pyrénées avaient donné, pour la valeur du coefficient dont il s'agit, le nombre 18336^m, qui diffère très-peu du précédent. Nous écrirons donc simplement

$$z-Z=18336^m\,(1+0,002837.\cos.2L)\,[1+0,002(v+V)]$$
$$\left(1+\frac{z+Z}{R}\right)\left[\log.\frac{H}{h}+0,434295\left(\frac{u-U}{5550}+2\,\frac{z-Z}{R}\right)\right].$$

399. Nous remarquerons d'ailleurs que le coefficient 18336^m a été déduit d'un autre coefficient 18393^m, déterminé immédiatement par les observations de M. Ramond, en ayant égard au décroissement de la gravité dans le sens vertical, et ramenant au niveau de la mer le résultat obtenu dans les lieux plus élevés où les observations avaient été faites. La substitution du nombre 18393^m au nombre 18336^m tiendrait donc compte d'une manière approchée, pour les observations dont il s'agit, des termes fort petits qui ont R au dénominateur, et qui sont introduits par la considération du décroissement de la pesanteur dans le sens vertical. On jugera d'après cela que l'on peut supprimer ces termes et employer utilement la formule plus simple

$$z-Z=18393^{m}(1+0,002837.\cos.2L)[1+0,002(v+V)]$$
$$\left[\log.\frac{H}{h}+0,00007825(u-U)\right].$$

On pourrait même réduire à l'unité le facteur qui contient la latitude L : mais il vaut mieux se servir de la table ci-après qui contient les logarithmes des produits de 18393 par les valeurs de ce facteur correspondantes à diverses latitudes. Plusieurs personnes ont construit des tables très-étendues destinées à faciliter le calcul des observations barométriques : mais il ne paraît pas que l'usage de ces tables offre un avantage sur l'application immédiate de l'équation précédente, en employant les tables des logarithmes ordinaires.

LATITUDES COMPTÉES DE L'ÉQUATEUR—L.	LOGARITHMES DES NOMBRES 18393(1+0,002837.cos.2L).
Degrés sexagésimaux.	
0	4,265 8830
5	8643
10	8089
15	7184
20	5955
25	4439
30	2682
35	0738
40	4,264 8665
45	6526
50	4386
55	2310
60	0361
65	4,263 8599
70	7077

Nous joignons l'exemple suivant :

Latitude, 1°45′. Station supérieure, $v = -1°,6$ Station inférieure, $V = 25,3$ $23,7$ $47,4 = 2(v+V)$	$h = 167,2$ $H = 337,79$	$u = 10°,0$ $U = 25,3$ $-15,3 = u - U.$

Logarithme du coefficient pour 0° de latitude.		4,265883
Log. 1,0474.		0,020113
Log. 337,79.	2,528660	
Log. 167, 2°.	2,223236	
Différence.	0,305424	
0,00007825 (—15,3).	0,001197	
	0,304227 dont le logarithme est. . .	$\bar{1},483198$
Logarithme de la hauteur cherchée (5877^m,5).		3,769194

Cet exemple présente le calcul de la hauteur du Chimboraço, d'après les observations de M. de Humboldt, l'un des cas où les termes négligés pouvaient devenir les plus sensibles. En conservant ces termes, M. Ramond trouve 5879^m,2 au lieu de 5877^m,5 : la différence de ces deux résultats est très-peu importante, eu égard à la grandeur de la hauteur calculée.

Nous donnerons encore le calcul de la hauteur du Guanaxuato, pris pour exemple dans l'Annuaire du bureau des longitudes.

Latitude, 21°. Station supérieure, $v = 21°,3$ Station inférieure, $V = 25,3$ $46,6$ $2(v+V) = 93,2$	$h = 600,95$ $H = 763,15$	$u = 21°,3$ $U = 25,3$ $u - U = -4°,0$

Logarithme du coefficient pour 26° de latitude.		4,2655952
Log. 1,0932.		0,0386996
Log. 763,15.	2,3826099	
Log. 600,95	2,7788383	
Différence.	0,1037716	
0,0007825(—4,0)—.	0,0003130	
	0,1034586 dont le logarithme est. .	$\bar{1}$,0247655
Logarithme de la hauteur cherchée (2314^m,3).		3,3890603

400. Les lettres h et H représentent dans les formules précédentes les indications, lues sur l'instrument, des hauteurs des colonnes de mercure qui font équilibre à la pression atmosphérique aux stations supérieure et inférieure. Cette indication est modifiée par la dilatation des corps sur lesquels les échelles sont gravées. Soit δ la dilatation linéaire de ces corps pour un degré du thermomètre centigrade, en sorte que la longueur 1 à la température 0° devienne $1+\delta u$ à la température u. Les hauteurs h et H observées respectivement aux températures u et U deviendraient donc $\frac{h}{1+\delta u}$ et $\frac{H}{1+\delta U}$, si on les observait à la température 0°. Par conséquent, pour avoir égard à la modification dont il s'agit, on doit écrire, dans la formule du n° 398, $\frac{H}{h}\,\frac{1+\delta u}{1+\delta U}$, ou à fort peu de chose près $\frac{H}{h}\,[1+\delta(u-U)]$, à la place de $\frac{H}{h}$. Il

résulte de là que le coefficient de u—U, dans les n°s 398 et 399, doit être augmenté du produit δ par le nombre 0,434295. En employant les résultats connus on déterminera donc ce coefficient comme il suit :

La dilatation de l'échelle étant supposée nulle.	0,00007825
Échelles sur verre et sur bois. . . .	0,00008205
Échelles sur cuivre.	0,00008641

On peut former d'avance une table du produit de ces coefficients par les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 9. De cette manière le calcul des hauteurs par la formule du n° 399 semble aussi prompt que l'on puisse le désirer.

401. Les observations barométriques et l'usage de la formule précédente pour la détermination des différences de niveau, exigent une grande circonspection. En effet, cette formule est fondée sur l'hypothèse d'un état d'équilibre et d'une disposition thermométrique et hygrométrique qui existent rarement dans l'atmosphère. L'expérience a fait reconnaître les circonstances favorables ou contraires aux observations. M. Ramond a établi sur ce sujet les règles suivantes :

« 1° On peut espérer d'avoir les hauteurs exactes, » quand on observera à midi, par un temps calme et » qui n'incline pas trop au changement, les deux ba- » romètres se trouvant l'un et l'autre sur des sommets » isolés, ou le baromètre inférieur étant placé dans » une plaine bien ouverte, à une distance médiocre. » Dans ce dernier cas même, il vaudrait mieux que la » distance fût plus grande, que d'avoir le baromètre » placé au pied des montagnes, où l'avantage de la

» proximité est plus que balancé par l'action perturba-
» trice des vents descendants. Hors de ces circonstances
» éminememnt favorables, les erreurs n'ont point de
» mesure fixe : elles ne peuvent être corrigées que par
» l'estime, et selon le degré d'influence que l'expérience
» de l'observateur assignera aux causes qui doivent
» les produire ;

» 2° On estimera, en général, les hauteurs trop
» faibles :

» Quand l'observation se fera le matin ou le soir ;

» Quand le baromètre inférieur étant dans une plaine,
» le baromètre supérieur sera dans une vallée étroite et
» profonde ;

» Quand les vents souffleront fortement de la région
» australe ;

» Quand le temps sera manifestement orageux ;

» 3° On estimera au contraire les hauteurs trop fortes :

» Quand on observera entre midi et deux ou trois
» heures, surtout l'été et quand le soleil ne sera pas
» caché par des nuages ;

» Quand le baromètre supérieur étant au sommet des
» montagnes, le baromètre inférieur sera placé dans
» une gorge étroite et fortement dominée ;

» Quand il régnera un vent fort de la région boréale,
» surtout si l'on est sur une montagne, et s'il en frappe
» la pente la plus escarpée ;

» 4° Enfin on sera certain que les erreurs seront
» grandes et variables dans tous les sens quand les
» différences de niveau seront peu considérables, et les
» deux baromètres placés dans la même plaine ou la

» même vallée, et bien plus encore lorsqu'ils seront
» placés dans deux vallées séparées par une chaîne de
» montagnes. Dans ces cas-ci la distance horizontale ne
» saurait être trop petite, et malgré la proximité, on ne
» pourra prendre confiance que dans les moyennes d'un
» grand nombre d'observations. »

Les causes principales d'erreur sont les vents, et l'irrégularité de la loi du décroissement de la température. Si la direction du mouvement de l'air était horizontale, il ne paraît pas que ce mouvement fît varier la hauteur du baromètre, à moins toutefois que la cuvette ne fût abritée du vent par un obstacle, dont l'effet serait de diminuer la pression. Mais quand la direction du vent est ascendante ou descendante, le mercure se tient nécessairement plus bas ou plus haut qu'il ne le ferait si le vent n'avait pas lieu, abstraction faite des irrégularités provenant de la manière dont la cuvette est exposée au vent, ou en est abritée. A l'égard de la température, les erreurs qui proviennent du défaut d'uniformité de son décroissement sont peut-être moins grandes que celles qui tiennent à ce que l'observation du thermomètre, au lieu de donner la véritable température de la couche horizontale d'air dans laquelle on se trouve, ne donne qu'une température locale produite en grande partie par le rayonnement du terrain et des corps environnants.

Les baromètres à cuvette dont le niveau se règle au moyen d'une vis de pression qui met la surface du mercure en contact avec une pointe fixe, sont généralement considérés comme les meilleurs. Il est important de bien connaître la température du mercure. Un ther-

momètre enchâssé dans la monture ne suffit pas pour cela. On a proposé une autre disposition qui consiste à avoir un second tube égal à celui du baromètre, fermé et rempli de mercure, dans lequel le thermomètre est plongé. Les nivellements exigent absolument le concours de deux observateurs munis chacun d'instruments pareils soigneusement comparés. Les observations correspondantes doivent être simultanées, et faites toujours entre onze heures et une heure après midi. On sait que dans les baromètres, la colonne de mercure, par l'effet de la capillarité, est plus courte qu'elle ne devrait être. La quantité de cette dépression est relative au diamètre du tube, et on en trouvera la valeur dans la table ci-contre. On néglige ordinairement d'en tenir compte, parce qu'elle affecte également les deux instruments quand leurs tubes sont d'égal diamètre; mais comme le résultat dépend, non de la différence des hauteurs des baromètres, mais du rapport de ces hauteurs, il convient d'y avoir égard, surtout quand la différence de niveau est peu considérable. Les baromètres doivent être placés verticalement, à l'abri du vent et du soleil. Le thermomètre pour la température de l'air doit être placé au dehors, à la hauteur de l'œil,

DIAMÈTRE DU TUBE.	DÉPRESSION.
millimètres.	millimètres.
2	4,560
3	2,902
4	2,039
5	1,506
6	1,148
7	0,881
8	0,685
9	0,535
10	0,420
11	0,351
12	0,260
13	0,205
14	0,160
15	0,125
16	0,097
17	0,075
18	0,059
19	0,043
20	0,035

et abrité seulement du soleil par le bâton qui le supporte. (Voyez, pour de plus grands détails, les *Mémoires sur la formule barométrique* de M. Ramond, et l'*Instruction pratique* qui y est jointe.)

XXVIII. Équations générales du mouvement d'un fluide sollicité par des forces quelconques.

402. Nous considérons un fluide en mouvement dont les parties sont sollicitées par des forces données, et nous désignons par

x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du fluide, comptées à partir d'une origine fixe sur trois axes rectangulaires;

X, Y, Z les vitesses que la force agissant sur la molécule placée en ce point imprimerait à l'unité de masse dans l'unité de temps, dans le sens des x, des y, et des z;

u, v, w les vitesses de cette molécule à la fin du temps t, dans le sens des x, des y et des z;

ρ la masse de l'unité de volume, ou la densité du fluide, qui a lieu à la fin du temps t, au point dont les coordonnées sont x, y, z;

p la valeur de la pression sur l'unité de surface, qui a lieu à la fin du temps t, dans le même point.

Les quantités u, v, w, ρ et p doivent être regardées omme des fonctions variables des coordonnées x, y, z et du temps t. Il en sera de même, en général, des forces représentées par X, Y, Z. Cela posé, le fluide étant censé se mouvoir de manière à former constam-

ment une masse continue, dont les parties ne se séparent, ni des autres parties, ni des parois solides contre lesquelles le fluide peut s'appuyer, le mouvement est assujetti à des conditions générales dont il s'agit de trouver l'expression analytique.

Quant aux relations qui doivent exister entre les vitesses des parties du fluide et les forces qui les sollicitent, on les connaîtra en appliquant le principe de d'Alembert (Voyez n° 257), qui convient à un système quelconque d'éléments matériels; c'est-à-dire en exprimant qu'il y a constamment équilibre entre les forces perdues appliquées à chacun des éléments du fluide. La force perdue pour la molécule située dans le point du fluide dont les coordonnées sont x, y, z, est ici la force capable d'imprimer à l'unité de masse, dans le temps dt, les vitesses $Xdt-du$, $Ydt-dv$, $Zdt-dw$, dans le sens des x, des y et des z. Par conséquent on voit d'après le n° 364, que la condition de l'équilibre du fluide est exprimée par l'équation

$$dp=\rho\left(\frac{Xdt-du}{dt}dx+\frac{Ydt-dv}{dt}dy+\frac{Zdt-dw}{dt}dz\right),$$

dans laquelle le second membre doit être une différentielle complète des variables x, y, z; en sorte que l'on doit avoir les trois équations distinctes

$$\frac{dp}{dx}=\rho\frac{Xdt-du}{dt},$$
$$\frac{dp}{dy}=\rho\frac{Ydt-dv}{dt},$$
$$\frac{dp}{dz}=\rho\frac{Zdt-dw}{dt}.$$

Dans ces équations, les différentielles du, dv, dw, représentent respectivement les accroissements que subissent les vitesses u, v, w pendant le temps infiniment petit dt. Or ces vitesses varient en général à mesure que le temps s'écoule, soit par l'effet des changements qui peuvent avoir lieu dans le point où la molécule du fluide est actuellement placée, soit par l'effet des déplacements que cette molécule subit; c'est-à-dire par l'effet des variations que subissent les coordonnées x, y, z considérées comme des fonctions du temps t. On doit donc avoir, par exemple, pour l'expression complète de du,

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}dt + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dt}dt + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}dt;$$

ou, puisque

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}udt + \frac{du}{dy}vdt + \frac{du}{dz}wdt.$$

La même remarque s'applique aux vitesses v et w. Ainsi l'on doit donner, dans les équations précédentes, aux différentielles du, dv, dw, les valeurs

$$du = \left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w\right)dt,$$

$$dv = \left(\frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dx}u + \frac{dv}{dy}v + \frac{dv}{dz}w\right)dt,$$

$$dw = \left(\frac{dw}{dt} + \frac{dw}{dx}u + \frac{dw}{dy}v + \frac{dw}{dz}w\right)dt;$$

et par conséquent ces équations deviendront

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dx}&=\rho\left(X-\frac{du}{dt}-\frac{du}{dx}u-\frac{du}{dy}v-\frac{du}{dz}w\right)\\ \frac{dp}{dy}&=\rho\left(Y-\frac{dv}{dt}-\frac{dv}{dx}u-\frac{dv}{dy}v-\frac{dv}{dz}w\right)\\ \frac{dp}{dz}&=\rho\left(Z-\frac{dw}{dt}-\frac{dw}{dx}u-\frac{dw}{dy}v-\frac{dw}{dz}w\right)\end{aligned}\right\}\ldots\ (1)$$

Elles conviennent à tous les points du fluide, et doivent être satisfaites par les expressions de u, v, w et p en t, x, y, z qui exprimeront l'état de mouvement de ce corps.

403. Quant à la condition nécessaire pour que le fluide forme une masse continue, concevons l'élément rectangulaire de volume dont les trois dimensions sont dx, dy, dz. La masse du fluide contenu dans cet élément, à la fin du temps t, est $\rho.dxdydz$, et à la fin du temps dt elle est devenue $\left(\rho+\frac{d\rho}{dt}dt\right)dxdydz$. Or, on exprimera qu'il n'y a aucune solution de continuité dans le fluide, si l'on écrit que l'accroissement $\frac{d\rho}{dt}dt.dxdydz$ éprouvé par cette masse, dans le temps dt, est égal à la masse du fluide qui est entré pendant le même temps, dans l'élément de volume dont il s'agit, par les trois faces les plus voisines de l'origine des coordonnées; moins celle qui en est sortie par les trois faces opposées. La masse du fluide qui entre par les trois premières faces dans le temps dt est

$$dydz.\rho udt+dxdz.\rho vdt+dx.dy.\rho wdt\,;$$

celle qui sort par les trois faces opposées dans le même temps est

$$dydz\left(\rho u+\frac{d.\rho u}{dx}dx\right)dt+dxdz\left(\rho v+\frac{d.\rho v}{dy}dy\right)dt$$
$$+dxdz\left(\rho w+\frac{d.\rho w}{dt}dz\right)dt.$$

On a donc, pour l'excès de la première sur la seconde,

$$-dxdydz\left(\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}\right)dt;$$

et en égalant cette quantité à l'accroissement

$$\frac{d\rho}{dt}\,dt.dxdydz\,,$$

on obtiendra, après la suppression des facteurs communs, pour l'équation appelée par quelques géomètres *équation de continuité*,

$$\frac{d\rho}{dt}+\frac{d.\rho u}{dx}+\frac{d.\rho v}{dy}+\frac{d.\rho w}{dz}=0\ldots\ldots\ (2)$$

Cette équation doit aussi être satisfaite pour tous les points de l'espace occupé par le fluide, par les expressions de u, v, w et ρ en fonction de t, x, y, z.

404. Les équations (1) et (2), conviennent à tous les cas du mouvement du fluide. On ajoutera seulement les remarques suivantes.

1° Lorsqu'il s'agit d'un fluide incompressible et homogène, ρ est constante, et par conséquent l'équation (2) se réduit à

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

qui exprime que le volume d'une partie quelconque du fluide ne varie point lorsque cette partie se déplace.

2° Lorsqu'il s'agit d'un fluide incompressible et non homogène, l'équation (2) se partage nécessairement dans les deux suivantes

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}&=0,\\ \frac{d\rho}{dt}+u\frac{d\rho}{dx}+v\frac{d\rho}{dy}+w\frac{d\rho}{dz}&=0,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

qui doivent subsister séparément.

3° Enfin, lorsqu'il s'agit d'un fluide élastique, on a, dans l'hypothèse d'une température uniforme et constante,

$$p = k\rho,$$

k désignant comme dans le n° 369 un coefficient constant.

Les équations précédentes suffiront toujours, l'état initial étant donné, et le fluide étant regardé comme un corps ayant une étendue indéfinie dans tous les sens, pour déterminer les quantités inconnues u, v, w, p et ρ en fonction de x, y, z et t, et pour faire connaître la nature du mouvement.

405. Mais si le fluide n'occupe qu'un espace limité, et s'appuie constamment contre une paroi solide, il est visible que les molécules contiguës à cette paroi sont immobiles, ou se meuvent dans le plan tangent à la surface. Soit généralement

$$F = 0,$$

l'équation de la surface de la paroi solide dont il s'agit, F étant une fonction des coordonnées x, y, z. La condition qui vient d'être énoncée, sera exprimée par l'équation

$$\frac{dF}{dx}u + \frac{dF}{dy}v + \frac{dF}{dz}w = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

à laquelle doivent satisfaire les expressions de u, v, w lorsqu'on donnera à x, y, z, les valeurs qui satisfont à l'équation $F=0$, c'est-à-dire les valeurs qui appartiennent à la surface du fluide contiguë à la paroi solide.

406. Si le fluide s'appuie contre une paroi mobile

dont l'équation soit toujours exprimée par $F=0$, F désignant maintenant une fonction de x, y, z et t, on aura, en différentiant cette équation par rapport à toutes les variables qu'elle contient,

$$\frac{dF}{dt}dt+\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0.$$

Or, on exprimera évidemment la condition qu'une molécule de fluide placée à la surface se meut sans quitter cette surface, en donnant dans cette équation, aux différentielles dx, dy, dz, les valeurs udt, vdt, wdt, ce qui la change en

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dx}u+\frac{dF}{dy}v+\frac{dF}{dz}w=0\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Cette dernière équation doit donc être satisfaite, dans le cas dont il s'agit, par les valeurs des coordonnées appartenant à la surface du fluide.

407. Si l'on considère un fluide incompressible, et qu'il ait une surface libre sur tous les points de laquelle s'exerce une pression uniforme et constante, on aura dans toute l'étendue de cette surface,

$$p-P=0,$$

P désignant cette pression constante. Donc, conformément à ce qui vient d'être dit, on exprimera que les molécules placées à la surface libre du fluide se meuvent sans la quitter, en posant l'équation

$$\frac{dp}{dt}+\frac{dp}{dx}u+\frac{dp}{dy}v+\frac{dp}{dz}w=0,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

qui doit être satisfaite par les valeurs des coordonnées appartenant à la surface libre dont il s'agit.

408. Jusqu'ici nous avons regardé x, y, z comme représentant les coordonnées d'un point quelconque de l'espace occupé par le fluide, comptées d'une origine fixe. Ces quantités sont alors des variables indépendantes. Mais l'on peut aussi concevoir que x, y, z représentent, à la fin du temps t, les coordonnées d'une molécule déterminée du fluide ; et alors on aura les relations

$$dx = udt\,,\quad dy = vdt\,,\quad dz = wdt.$$

Cette nouvelle signification attribuée à x, y, z ne change rien aux équations établies dans les n°s 402 et suivants, mais alors ces variables ne seront plus regardées comme indépendantes ; elles deviendront des fonctions de t, qui sera maintenant la seule variable indépendante. Et lorsqu'on aura déterminé les expressions de u, v, w, p et ρ en x, y, z, t, qui satisfont aux équations des numéros 402 et suivants, on trouvera les valeurs de x, y, z en t, en intégrant les équations différentielles précédentes, dont on déduit

$$x = x_0 + \int udt, y = y_0 + \int vdt,\quad z = z_0 + \int wdt.,\ldots \qquad (8)$$

pour l'expression des coordonnées qui appartiennent, à la fin du temps t, à la molécule du fluide dont les coordonnées initiales sont x_0, y_0, z_0.

L'élimination de t entre les trois équations (8) donnera d'ailleurs deux équations distinctes entre les variables x, y, z ; elles appartiendront à la courbe décrite par la molécule dont les coordonnées étaient x_0, y_0, z_0, quand on a commencé à compter le temps. On voit

donc que toutes les courbes décrites par les molécules du fluide seront exprimées par deux équations qui ne pourront différer d'une molécule à une autre que par les valeurs des constantes x_0, y_0, z_0 représentant les coordonnées du premier point de chaque courbe. Il n'est pas inutile d'ajouter que si l'on considère une molécule qui se trouvait sur la surface du fluide à l'instant où l'on commence à compter le temps, cette molécule devant, d'après le n° 405, se mouvoir constamment dans le sens de la surface, il est nécessaire que les équations dont il s'agit, qui expriment le système des courbes décrites par les molécules, soient telles qu'en prenant dans ces équations, pour les constantes x_0, y_0, z_0, les coordonnées d'un point quelconque de la surface à l'origine du mouvement, les équations particulières qui en résulteront s'accordent avec les équations (5) ou (6) des n°s 405 et 406, s'il s'agit d'une partie de la surface appuyée contre une paroi solide; ou avec l'équation (7) du n° 407, s'il s'agit de la surface libre d'un fluide incompressible.

Cas où la fonction $udx+vdy+wdz$ est une différentielle complète d'une fonction de x, y, z.

409. Si l'on admet que la fonction $udx+vdy+wdx$ est la différentielle complète, prise par rapport à x, y et z, d'une certaine fonction φ de ces trois variables (qui doit aussi en général contenir le temps t), on aura

$$u=\frac{d\varphi}{dx}, \quad v=\frac{d\varphi}{dy}, \quad w=\frac{d\varphi}{dz},$$

et

$$d\varphi=udx+vdy+wdz,$$

en représentant par $d\varphi$ la différentielle de la fonction φ

prise en faisant varier seulement x, y, z. Mais, en ajoutant les trois équations du n° 402, après les avoir multipliées respectivement par dx, dy, dz, on trouvera

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}dx\\ +\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}dy\\ +\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}dz\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l}Xdx-\frac{du}{dt}dx-u\frac{du}{dx}dx-v\frac{du}{dy}dx-w\frac{du}{dz}dx\\ Ydy-\frac{dv}{dt}dy-u\frac{dv}{dx}dy-v\frac{dv}{dy}dy-w\frac{dv}{dz}dy\\ Zdz-\frac{dw}{dt}dz-u\frac{dw}{dx}dz-v\frac{dw}{dy}dz-w\frac{dw}{dz}dz\end{array}\right\},$$

équation qui peut s'écrire

$$\frac{dp}{\rho}=Xdx+Ydy+dz$$
$$-d.\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\varphi}{dx}d.\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d\varphi}{dy}d.\frac{d\varphi}{dy}-\frac{d\varphi}{dz}d.\frac{d\varphi}{dz},$$

ou bien

$$\frac{dp}{\rho}=Xdx+Ydy+Zdz$$
$$-d.\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}d.\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],$$

en comprenant toujours que les différentielles marquées par le signe d sont prises en faisant varier x, y, z seules.

410. L'équation précédente peut être immédiatement intégrée, lorsque la relation de p et ρ est connue. Ainsi, pour un fluide incompressible et homogène, la densité ρ étant constante, les équations (1) et (3) sont remplacées par les suivantes :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{p}{\rho}=const.+\int(Xdx+Ydy+Zdz)\\ -\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right],\\ \frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0.\end{array}\right\}\ldots(a)$$

Elles suffiront, l'état initial étant connu, pour déterminer le mouvement du fluide, lorsque ce fluide aura une étendue indéfinie dans tous les sens. Quand on aura déterminé au moyen de ces équations les expressions des fonctions φ et p en x, y, z et t, on aura les vitesses des molécules du fluide au moyen des équations

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz}.$$

Si l'étendue du fluide est limitée, la fonction φ devra satisfaire, pour les valeurs particulières de x, y, z qui appartiendront à la surface, aux équations déterminées (5), (6) et (7); en sorte que l'on devra avoir pour tous les points d'une paroi solide fixe,

$$\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dz}=0,\ldots\ldots\ (b)$$

pour tous les points d'une paroi solide mobile

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dF}{dz}\frac{d\varphi}{dz}=0,\ldots\ldots\ (c)$$

$F=0$ étant l'équation de la surface de cette paroi; et enfin

$$\frac{dp}{dt}+\frac{dp}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dp}{dz}\frac{d\varphi}{dz}=0,\ldots\ldots\ (d)$$

pour les points de la surface libre soumise à une pression normale uniforme et constante.

411. Dans le cas d'un fluide élastique, la température étant supposée uniforme et constante (hypothèse qui ne s'accorde point avec l'état naturel de ces fluides, lorsque le mouvement donne lieu à des changements sensibles dans la densité des parties), on a $p=k\rho$, en

désignant par k un coefficient constant. Les équations indéfinies exprimant les conditions du mouvement du fluide sont donc

$$\left.\begin{aligned} kl\rho = const + \int (Xdx + Ydy + Zdz) - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2\right] \\ \frac{dp}{dt} + \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(p\frac{d\varphi}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(p\frac{d\varphi}{dz}\right) = 0; \end{aligned}\right\} \ldots (e)$$

et si le fluide est contenu dans une paroi solide, la fonction φ devra satisfaire, pour les valeurs x, y, z appartenant à cette paroi, aux équations déterminées (b) ou (c) du numéro précédent.

412. Les équations précédentes paraissant plus faciles à traiter que celles qui ont été données dans les n°s 402 et suivants, il importait de distinguer les cas particuliers où le mouvement du fluide est tel, que l'on peut supposer d'avance les vitesses u, v, w respectivement données par les coefficients différentiels partiels relatifs à x, y, z d'une fonction φ de x, y, z et t. Lagrange a montré que la proposition énoncée subsistait à toutes les époques du mouvement si elle avait lieu dans un seul instant, pourvu toutefois que la fonction $Xdx + Ydy + Zdz$ fût elle-même une différentielle complète de x, y, z. Il en résulte que cette proposition peut toujours être admise lorsque, dans l'état initial, les molécules du fluide n'ont aucune vitesse. On reconnaît également que les équations des n°s 410 et 411 peuvent être employées dans tous les cas où les mouvements du fluide consistent dans des oscillations ou vibrations, et où l'on suppose les vitesses et les déplacements des molécules assez petits pour qu'il soit permis d'en négliger les puissances supérieures et les produits.

XXIX. Mouvement d'un fluide pesant dans un vase. Hypothèse du parallélisme des tranches.

413. Considérons une portion de fluide sollicitée par la gravité, et contenue dans un tuyau de figure quelconque, mais dont les dimensions transversales sont supposées extrêmement petites. En appliquant au mouvement de ce fluide les résultats exposés dans l'article précédent, dont nous conservons les dénominations, on voit, en premier lieu, que les ordonnées z étant supposées verticales et comptées de haut en bas, on a ici $X=0$, $Y=0$, $Z=g$. Ainsi, la fonction $Xdx+Ydy+Zdz$, dans l'équation du n° 409, se réduit à gdz.

En second lieu, la grosseur du tuyau étant supposée très-petite, on peut négliger les vitesses des molécules du fluide, dans le sens perpendiculaire à l'axe du tuyau, par rapport aux vitesses des mêmes molécules dans le sens de cet axe, et regarder toutes les molécules appartenant à une section quelconque faite perpendiculairement à l'axe du tuyau, comme ayant le même mouvement que celle de ces molécules qui est placée dans l'axe même. Soit d'ailleurs m une section transversale quelconque du tuyau; désignonspar x, y, z les coordonnées du point de l'axe où cette section est placée, et par s la longueur de l'axe comptée jusqu'à ce point d'une origine fixe quelconque : la vitesse de la molécule placée dans l'axe étant $\frac{ds}{dt}$, et la fonction $d\varphi=udx+vdy+wdz$ se réduisant à $\frac{ds}{dt}ds$, on attribuera donc la même valeur à cette fonction pour toutes les molécules placées dans la section m. Nous écri-

rons, pour abréger, u à la place de $\frac{ds}{dt}$, en sorte que u désignera maintenant la vitesse du fluide dans le sens de l'axe du tuyau, et que nous aurons $d\varphi = uds$. Ainsi, l'équation du n° 409, qui, étant appliquée aux molécules placées dans l'axe du tuyau, devient

$$\frac{dp}{\rho} = gdz - \frac{du}{dt}\,ds - \frac{1}{2}\,d.u^2, \ldots\ldots\ldots \text{(A)}$$

sera regardée comme subsistant pour toutes les molécules placées dans une section quelconque faite perpendiculairement à cet axe. Les différentielles dz, dp, $d.u^2$ sont prises en faisant varier s seule.

414. A l'égard de l'équation qui exprimera la continuité du fluide, il convient de revenir au principe employé dans le n° 403. Soit donc ω l'aire très-petite de la section faite dans le tuyau au point m, et considérons l'élément du tuyau placé à la suite de cette section dont l'épaisseur est ds. La masse du fluide contenu dans cet élément à la fin du temps t est $\rho\omega ds$, et à la fin du temps $t+dt$, elle est $\left(\rho + \frac{d\rho}{dt}dt\right)\omega ds$. Mais, d'après les hypothèses admises ci-dessus, il est entré dans cet élément, pendant le temps dt, par une de ses faces, la masse de fluide exprimée par $\rho\omega udt$, et il en est sorti par la face opposée, une masse exprimée par $\left(\rho\omega u + \frac{d.\rho\omega u}{ds}ds\right)dt$. Donc on a pour l'équation de continuité cherchée, la relation

$$\omega\frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho\omega u}{ds} = 0 \ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

415. Les suppositions d'après lesquelles on a obtenu l'équation (A) du n° 413, reviennent à considérer le fluide comme étant partagé en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe du tuyau, en admettant que les molécules contenues dans chaque tranche ont une vitesse commune dans le sens de cet axe. Concevons en effet un tel système, et proposons-nous de trouver directement les conditions du mouvement d'une tranche quelconque. La masse de la tranche m est $\rho.\omega ds$; son poids est $\rho g.\omega ds$, produisant dans le sens de l'axe du tuyau un effort $\rho g.\omega ds.\frac{dz}{ds}$ ou $\rho g.\omega dz$. De plus, la face supérieure de la tranche supporte la pression $p\omega$, tandis que la face inférieure supporte en sens contraire la pression $(p+dp)(\omega+d\omega)$; et comme la pression $p\omega$ sur la face supérieure est détruite d'après la propriété exposée dans les n°s 361 et suivants, par la partie $p(\omega+d\omega)$ de la pression exercée sur la surface inférieure de la tranche, cette tranche est seulement sollicitée en sens contraire de son mouvement, en vertu de la différence des pressions exercées sur ses deux faces, par l'effort $dp.\omega$. L'équation du mouvement de la tranche est donc

$$\rho\omega ds\left(\frac{du}{dt}+\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}\right)=\rho g.\omega dz-dp.\omega\,;$$

ce qui revient à l'équation (A), en divisant par $\rho\omega$, et faisant attention que $\frac{ds}{dt}=u$.

Quoique les suppositions dont il s'agit, qui sont connues sous le nom d'*hypothèse du parallélisme des*

tranches, ne conviennent véritablement qu'au cas où le fluide coule dans un tuyau dont la section est très-petite, et ne change pas brusquement de grandeur, on les a néanmoins appliquées à des cas plus étendus. Mais les résultats auxquels elles conduisent ne peuvent être regardés comme étant généralement conformes aux efforts naturels, et ne doivent pas être admis sans restriction.

Mouvement d'un fluide incompressible et pesant, dans un tuyau dont les sections transversales sont très-petites.

416. Considérons, comme dans le n° 413, une portion de fluide AB (fig. 42) sollicitée par la gravité, et coulant dans un tuyau. En supposant le fluide incompressible, la densité ρ sera constante, et l'équation (B) du n° 414, se réduira à

$$\frac{d.\omega u}{ds} = 0,$$

ce qui indique qu'à un instant quelconque la vitesse du fluide est, dans toute l'étendue du tuyau, en raison inverse de l'aire de la section. On en conclut qu'il suffit de déterminer la valeur de la vitesse dans une section donnée pour connaître le mouvement du fluide. Soit donc U la valeur de la vitesse qui aurait lieu à la fin du temps t dans la section dont l'aire serait Ω, on aura par l'équation précédente,

$$u = \frac{\Omega U}{\omega}, \quad \text{d'où l'on tire} \quad \frac{du}{dt} = \frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt} \ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

Ces valeurs étant substituées dans l'équation (A) du n° 413 la changent en

$$\frac{dp}{\rho} = gdz - \Omega \frac{dU}{dt} \frac{ds}{\omega} - \frac{1}{2} d\left(\frac{\Omega^2 U^2}{\omega^2}\right);$$

et en intégrant par rapport à la variable s, il vient

$$p = const. + \rho g z - \rho \Omega \frac{dU}{dt} \int \frac{ds}{\omega} - \frac{\rho}{2} \frac{\Omega^2 U^2}{\omega^2} \text{.....} \quad (D)$$

417. Cela posé, il est nécessaire de distinguer divers cas. Le premier est celui où une portion de fluide coule dans un tuyau d'une longueur indéfinie, dont elle occupe successivement diverses parties. Nous désignerons à la fin du temps t par

O, O′ les aires des sections extrêmes A, B;

z la différence de niveau des centres des sections A et m;

ζ la différence de niveau des centres des sections A et B;

S, S′ les longueurs de l'axe du tuyau comptées d'une origine fixe jusqu'à la section supérieure A du fluide, et jusqu'à la section inférieure B;

m la valeur de l'intégrale $\int \frac{ds}{d}$, prise dans l'intervalle Am;

M la valeur de la même intégrale prise dans l'intervalle AB;

P, P′ les pressions (que l'on supposera constantes par rapport au temps), exercées extérieurement sur les sections extrêmes A et B.

L'équation (D) du numéro précédent donnera pour la section supérieure A,

$$P = const. - \frac{\rho}{2} \frac{\Omega^2 U^2}{O^2};$$

et par conséquent l'on aura pour une section quelconque

$$p = P + \rho g z - \rho m \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{U^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) \ldots\ldots \text{(E)}$$

En appliquant cette dernière équation à la section inférieure B, il viendra

$$P' = P + \rho g \zeta - \rho M \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{\rho U^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right) \ldots\ldots \text{(F)}$$

En remarquant d'ailleurs que la vitesse à la section supérieure A est exprimée par $\frac{dS}{dt}$, on a, d'après l'équation (C), $\frac{dS}{dt} = \frac{\Omega U}{O}$, ou

$$O dS = \Omega U dt \ldots\ldots \text{(G)}$$

Dans les équations (F) et (G), les quantités O, O', ζ et M sont données en fonction de S, lorsqu'on connaît la figure du tuyau et le volume du fluide. Ces équations détermineront donc en fonction de t les variables S et U, ce qui fera connaître le mouvement du fluide. En éliminant $\frac{dU}{dt}$, entre les équations (E) et (F), on a

$$p = P + \rho g z - (P - P' + \rho g \zeta)\frac{m}{M} - \frac{\rho U^2}{2}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2} - \frac{\Omega^2}{O^2} - \left(\frac{\Omega^2}{O'^2} - \frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{m}{M}\right], \ldots \text{(H)}$$

pour la valeur de la pression dans la section quelconque m du tuyau.

418. Le second cas est celui où le fluide s'écoulerait par l'extrémité inférieure du tuyau, à laquelle la section extrême B se trouverait placée, tandis que la section supérieure A s'abaisserait progressivement. Les équations (F), (G), (H) du numéro précédent, conviennent à ce cas, et serviront à déterminer le mouvement

du fluide et la pression, en y regardant O′ et l'intégrale M comme constantes.

419. Dans le troisième cas, qui est l'inverse du précédent, on admet que le fluide est renouvelé à l'extrémité supérieure du tuyau, où la section A est constamment placée, tandis que la section B s'abaisse progressivement. Ce renouvellement du fluide est supposé s'opérer par l'addition de nouvelles tranches ayant les mêmes vitesses que celles qu'elles remplacent. L'aire O de la section supérieure doit alors être regardée comme constante dans les équations du n° 417, aussi bien que S. On remplacera l'équation (G) par la suivante

$$O'dS' = \Omega U dt,$$

et on exprimera dans l'équation (F) les quantités O′, ζ et M en fonction de S′ d'après la figure du tuyau. L'équation (F) réunie à la précédente donnera S′ et U en fonction de t.

420. Enfin le dernier cas est celui où l'on suppose que le tuyau est constamment rempli par le fluide, qui s'écoule par l'extrémité inférieure, en même temps qu'il est renouvelé par l'extrémité supérieure. L'équation (F) du n° 417, convient également à cette hypothèse en y regardant les quantités O, O′, ζ et M comme des constantes; et la vitesse U étant la seule quantité à déterminer, il n'y a plus lieu à considérer l'équation (G). Si, pour plus de simplicité, on prend pour la section Ω à laquelle se rapporte la vitesse U, la section qui forme l'extrémité inférieure du tuyau, l'équation (F) deviendra

$$P' = P + \rho g \zeta - \rho M \Omega \frac{dU}{dt} - \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - \frac{\Omega^2}{O'^2}\right); \ldots\ldots \quad (I)$$

et l'équation (H) donnera pour la valeur de la pression dans une section quelconque

$$p=P+\rho gz-(P-P'+\rho g\zeta)\frac{m}{M}-\frac{\rho U^2}{2}\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O^2}-\left(1-\frac{\Omega^2}{O^2}\right)\frac{m}{M}\right]\ldots \quad (K)$$

L'équation (I) étant résolue par rapport à dt donne

$$dt=\frac{\rho M\Omega\, dU}{P-P'+\rho g\zeta-\frac{\rho}{2}\left(1-\frac{\Omega^2}{O^2}\right).U^2}.$$

Posons, pour abréger

$$\frac{\frac{\rho}{2}\left(1-\frac{\Omega^2}{O^2}\right)}{P-P'+\rho g\zeta}=\beta^2,\quad \frac{P-P'+\rho g\zeta}{\rho M\Omega}=\gamma;$$

nous aurons

$$dt=\gamma\frac{dU}{1-\beta^2U^2};$$

d'où, en intégrant et déterminant la constante de manière que l'on ait en même temps $t=0$ et $U=0$,

$$t=\frac{\gamma}{2\beta}\, l\frac{1+\beta U}{1-\beta U}.$$

En résolvant cette équation par rapport à U, nous obtenons

$$U=\frac{1}{\beta}\frac{e^{\frac{2\beta}{\gamma}t}-1}{e^{\frac{2\beta}{\gamma}t}+1},\ldots\ldots \quad (L)$$

pour l'expression de la vitesse qui a lieu dans la section inférieure du tuyau à la fin du temps t. La valeur de la pression dans une tranche quelconque, sera ensuite donnée par la formule (K).

On doit remarquer d'ailleurs que la valeur donnée par l'expression (L) après un certain temps (ordinairement très-court et presque insensible) ne différera pas d'une quantité appréciable de la valeur constante

$$U=\frac{1}{\beta}=\sqrt{\frac{2g\left(\frac{P-P'}{\rho g}+\zeta\right)}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}},\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(M)}$$

qui répond à la supposition de t infiniment grand, et qui serait donnée immédiatement par l'équation (I), si l'on y faisait $\frac{dU}{dt}=0$. En adoptant cette dernière valeur de U, l'expression (K) de la pression prendra la forme plus simple

$$p=P+\rho gz-\frac{\rho U^2}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\omega^2}-\frac{\Omega^2}{O^2}\right),\ldots\ldots \text{(N)}$$

laquelle se déduit aussi de l'expression (E), en y faisant $\frac{dU}{dt}=0$.

On conclut de ces derniers résultats, que le tuyau étant entretenu constamment plein, le mouvement du fluide peut, après quelques instants, être regardé comme uniforme, la vitesse à la section inférieure étant représentée par la formule (M), et la pression dans une section quelconque par la formule (N). Ainsi, dans ce cas, la vitesse à la section inférieure ne dépend pas de la figure du tuyau, mais seulement du rapport des sections extrêmes.

On ne doit point oublier que les résultats dont il s'agit sont fondés sur la forme de l'intégrale (L), en sorte qu'ils supposent que le facteur $1-\frac{\Omega^2}{O^2}$ est positif, ou

que la section inférieure du tuyau est plus petite que la section supérieure. Si cette condition n'avait pas lieu, la vitesse du fluide tendrait à augmenter indéfiniment.

Efforts supportés par le tuyau pendant le mouvement du fluide.

421. Supposons comme dans le n° 416, qu'une portion de fluide incompressible AB (fig. 42), sollicitée par la gravité, coule dans un tuyau d'une longueur indéfinie, et proposons-nous de connaître les efforts que le fluide exerce contre le tuyau, c'est-à-dire les forces qu'il faut employer pour maintenir ce tuyau dans sa position. Cette question se résoudra de la manière la plus simple en observant que le fluide en mouvement et la paroi solide et fixe du tuyau forment un système qui peut être supposé libre dans l'espace, si l'on remplace les obstacles qui maintiennent le tuyau par des forces égales et opposées aux efforts que ces obstacles supportaient. Soient E, F, G les résultantes partielles des efforts dont il s'agit, dirigées dans le sens des x, des y et des z. Le système est donc sollicité (en négligeant le poids du tuyau), par des forces égales et contraires aux efforts E, F, G, et par l'action de la gravité sur le fluide. Et comme les mouvements des parties du système, qui se réduisent ici aux mouvements des parties du fluide, doivent toujours être tels qu'il y ait équilibre entre les forces qui produiraient ces mouvements et les forces appliquées au système prises en sens contraires, on voit que l'expression de cette condition déterminera les valeurs des efforts E, F, G, lorsque le mouvement du fluide sera connu.

Conservons les dénominations des n°s 413 et suivants. La tranche quelconque placée en m se meut, à la fin du temps t, dans le sens de l'axe du tuyau avec la quantité de mouvement $\rho\omega ds.u$, dont les composantes dans le sens des x, des y et des z sont respectivement

$$\rho\omega ds.u\frac{dx}{ds},\quad \rho\omega ds.u\frac{dy}{ds},\quad \rho\omega ds.u\frac{dz}{ds}.$$

Ainsi la condition d'équilibre énoncée ci-dessus donne les équations

$$E=-\rho\int\omega ds.\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right),$$

$$F=-\rho\int\omega ds.\frac{d}{dt}\left(u\frac{dy}{ds}\right),$$

$$G=-\rho\int\omega ds.\frac{d}{dt}\left(u\frac{dz}{ds}\right)+\rho g\int\omega ds,$$

les intégrales désignées par $\int$ étant prises entre les sections extrêmes A et B du fluide. Mais on a

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right)=\left(\frac{du}{dt}+\frac{du}{ds}\frac{ds}{dt}\right)\frac{dx}{ds}+u\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right).\frac{ds}{dt};$$

ou, parce que $\frac{ds}{dt}=u$,

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{dt}\frac{dx}{ds}+u\frac{d}{ds}\left(u\frac{dx}{ds}\right);$$

et par l'équation (C) du n° 416,

$$u=\frac{\Omega U}{\omega},\qquad \frac{du}{dt}=\frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}.$$

Il vient donc, en substituant ces valeurs,

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dx}{ds}\right)=\frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{\Omega^2U^2}{\omega}.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds}\right).$$

On trouvera de même

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dy}{ds}\right)=\frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{\Omega^2U^2}{\omega}.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds}\right),$$

$$\frac{d}{dt}\left(u\frac{dz}{ds}\right)=\frac{\Omega}{\omega}\frac{dU}{dt}\frac{dz}{ds}+\frac{\Omega^2U^2}{\omega}.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds}\right).$$

Ainsi les expressions précédentes reviennent à

$$E=-\rho\int\left[\Omega\frac{dU}{dt}.dx+\Omega^2U^2.d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds}\right)\right],$$

$$F=-\rho\int\left[\Omega\frac{dU}{dt}.dy+\Omega^2U^2.d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds}\right)\right],$$

$$G=-\rho\int\left[\Omega\frac{dU}{dt}.dz+\Omega^2U^2.d\left(\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds}\right)\right]+\rho g\int\omega ds;$$

ou bien à

$$E=const.-\rho\Omega\frac{dU}{dt}x-\rho\Omega^2U^2.\frac{1}{\omega}\frac{dx}{ds},$$

$$F=const.-\rho\Omega\frac{dU}{dt}y-\rho\Omega^2U^2.\frac{1}{\omega}\frac{dy}{ds},$$

$$G=const.-\rho\Omega\frac{dU}{dt}z-\rho\Omega^2U^2.\frac{1}{\omega}\frac{dz}{ds}+\rho g\int\omega ds,$$

en déterminant les constantes de manière que ces expressions soient nulles pour les valeurs qui conviennent à la section supérieure A du fluide, et donnant ensuite aux variables les valeurs qui conviennent à la section inférieure B.

Si l'on représente comme ci-dessus par O, O', les aires des sections A et B; par λ, μ, ν et λ', μ', ν' les angles que l'axe du tuyau forme respectivement au point A et au point B avec les axes des x, des y et des z; par ξ, η et ζ les distances des points A et B de l'axe mesurées parallèlement aux x, aux y et aux z; et enfin par Π le

poids du fluide contenu dans le tuyau, on aura définitivement

$$E = -\rho\Omega \frac{dU}{dt} \xi - \rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\lambda'}{O'} - \frac{\cos.\lambda}{O} \right),$$

$$F = -\rho\Omega \frac{dU}{dt} \eta - \rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\mu'}{O'} - \frac{\cos.\mu}{O} \right),$$

$$G = -\rho\Omega \frac{dU}{dt} \zeta - \rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\nu'}{O'} - \frac{\cos.\nu}{O} \right) + \Pi,$$

pour les expressions des forces cherchées. Ces formules remarquables montrent que les efforts exercés sur le tuyau dans une direction quelconque dépendent seulement de la situation respective des extrémités de la colonne de fluide, de la direction du tuyau et de l'amplitude de la section transversale à ces mêmes extrémités, et enfin de la vitesse du fluide. Elles sont indépendantes de la figure du tuyau entre les points extrêmes dont il s'agit.

422. Les formules précédentes s'appliqueront facilement aux divers cas d'écoulement qui ont été considérés dans les n°s 417 et suivants. En général, les efforts supportés par le tuyau varient avec le temps. Mais dans le cas du n° 420, c'est-à-dire quand il s'agit d'un tuyau entretenu constamment plein, où l'on peut regarder (abstraction faite des premiers instants du mouvement) la vitesse comme coustante, ces formules deviendront, en écrivant Ω au lieu de O',

$$E = -\rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\lambda'}{\Omega} - \frac{\cos.\lambda}{O} \right),$$

$$F = -\rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\mu'}{\Omega} - \frac{\cos.\mu}{O} \right),$$

$$G = -\rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\nu'}{\Omega} - \frac{\cos.\nu}{O} \right) + \Pi.$$

Dans ces dernières équations,

$$U = \sqrt{\frac{2g\xi}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}};$$

Mouvement d'un fluide incompressible et pesant dans un vase de figure quelconque.

423. La connaissance exacte du mouvement d'un fluide pesant dans un vase exigerait l'emploi des équations différentielles qui ont été données dans l'article XXVIII. On peut néanmoins, dans plusieurs cas, déduire des notions présentées dans les nos 416 et suivants des résultats qui s'accordent avec les effets naturels, et dont la connaissance est très-utile.

Les cas qu'il importe de considérer pour les applications, sont : 1° celui où un vase qui avait été rempli de fluide se vide par un orifice inférieur, comme on l'avait supposé dans le n° 418, et 2° celui où un vase est entretenu constamment plein, le fluide qui s'écoule par l'orifice étant continuellement remplacé à la surface supérieure, comme on l'avait supposé n° 420. La principale question que l'on se propose, consiste à déterminer la quantité de fluide qui sera débitée par l'orifice dans un temps donné, et cette question dépend elle-même de la détermination de la vitesse du fluide à cet orifice.

Considérons un vase de figure quelconque dont le fluide s'écoule par l'orifice NN (fig. 43). Admettons que cet orifice soit évasé, c'est-à-dire que la paroi supérieure ait près de l'orifice une figure telle que l'on puisse attribuer à tous les filets du fluide qui traversent le plan NN

des directions perpendiculaires à ce plan. Soit MM la surface supérieure du fluide contenu dans le vase à la fin du temps t. L'observation apprend que cette surface diffère très-peu d'un plan horizontal, surtout quand l'orifice NN est sensiblement moindre que l'aire de la surface dont il s'agit, et quand elle n'est pas très-voisine de cet orifice. Cela posé, considérant un élément quelconque infiniment petit de l'aire de l'orifice placé en B et le filet de fluide qui traverse cet élément, on peut toujours concevoir ce filet prolongé en A jusqu'à la surface supérieure du fluide, en lui donnant une figure telle qu'il contienne toutes les molécules qui, par le progrès du mouvement, doivent traverser le plan de l'orifice en B. Or, si la figure de tous les filets AB était connue, on pourrait appliquer à chacun d'eux les résultats présentés dans les n°s 416 et 417, en sorte que l'on connaîtrait la valeur de la vitesse du fluide à la fin du temps t pour un élément quelconque de l'aire de l'orifice, et, par conséquent, la quantité de fluide écoulé dans un temps donné. On doit remarquer, d'ailleurs, que la connaissance de la figure des filets de fluide AB, est ici absolument nécessaire pour la détermination du mouvement du fluide, puisque la formule (F) du n° 416, dont on doit faire usage, contient l'intégrale $M=\int_S^{S'} \frac{ds}{\omega}$ dont la valeur dépend de cette figure. Et il en résulte qu'en général le mouvement du fluide, dans un vase qui se vide par un orifice inférieur, ne peut être connu avec l'exactitude nécessaire.

424. Mais si la surface supérieure du fluide dans le vase est maintenue constamment au niveau MM, les

parties du fluide qui s'abaissent étant continuellement remplacées par d'autres qui affluent avec des vitesses égales aux vitesses des premières, on devra appliquer aux divers filets AB les résultats présentés dans le n° 420. Ainsi, après un temps très-court, le mouvement du fluide dans toutes les parties demeurera constant; et, en supposant que les pressions extérieures supportées par les sections MM et NN soient égales entre elles, la vitesse du fluide au point B de l'orifice sera d'après la formule (M)

$$U = \sqrt{\frac{2g\zeta}{1-\frac{\Omega^2}{O^2}}},$$

ζ représentant la distance verticale du point B à la surface supérieure MM du fluide, ou la *charge du fluide* sur le point B; et $\frac{\Omega}{O}$ étant le rapport entre les aires des sections extrêmes B et A du filet AB, rapport qui ne peut différer sensiblement de celui des aires des sections NN et MM du vase. Ainsi, dans le cas d'un écoulement constant dans un vase entretenu plein, on peut évaluer avec une exactitude suffisante, la vitesse du fluide dans les différents points du plan de l'orifice, et déterminer, en conséquence, le volume du fluide débité dans l'unité de temps.

425. Quant aux pressions qui ont lieu dans les diverses parties du vase, on voit, par la formule (N) du n° 420, que la détermination de la pression dans un temps donné exige la connaissance de la section ω du filet AB qui passerait par ce point. La figure de ces

filets demeurant inconnue, la pression ne peut donc être déterminée exactement : on ne peut que l'évaluer approximativement d'une manière fort imparfaite en général, en appliquant au vase que l'on considère la formule (N), qui ne convient réellement qu'à un tuyau dont la grosseur est très-petite.

Il faut bien remarquer, d'ailleurs, que cette formule ne s'applique véritablement qu'à un filet de fluide d'une section très-petite coulant dans un tuyau solide. Si l'on voulait considérer un ensemble de filets de fluide, comme les actions se transmettent alors d'un filet à un autre, il faudrait prendre en considération la force centrifuge des molécules qui augmente nécessairement d'une manière sensible la pression. L'effet de cette force n'altère pas le mouvement du fluide dans chaque filet, parce qu'elle est toujours perpendiculaire à la direction de l'axe du filet; mais elle augmente la pression dans la partie du vase vers laquelle les filets de fluide tournent leur convexité. Ainsi, les résultats relatifs au mouvement du fluide, déduits de la considération du mouvement dans chaque filet pris à part, peuvent être admis, mais il n'en est pas de même des résultats relatifs à la pression.

426. A l'égard des efforts supportés par le vase pendant le mouvement du fluide, on peut appliquer ici les expressions du n° 422. Les angles désignés par λ et μ sont droits pour tous les filets, et l'angle ν est nul. De plus, l'angle désigné par λ' sera droit, si l'on suppose le plan des yz perpendiculaire au plan NN de l'orifice, et l'effort désigné par E sera nul. On aura donc sim-

plement pour les efforts horizontal et vertical exercés sur le vase

$$F = -\rho\Omega U^2 \cos.\mu',$$
$$G = -\rho\Omega^2 U^2 \left(\frac{\cos.\nu'}{\Omega} - \frac{1}{O}\right) + \Pi;$$

expressions qui se réduisent à

$$F = -\rho\Omega U^2,$$
$$G = \rho\frac{\Omega^2 U^2}{O} + \Pi,$$

lorsque le plan de l'orifice est vertical; et dans lesquelles on prendra, pour les quantités O et Ω, les aires des sections MM et NN, et pour U^2, la moyenne des carrés des vitesses des filets de fluide qui traversent le plan NN, ces vitesses étant évaluées conformément à ce qui a été dit n° 424.

Comme l'effet de la force centrifuge est pris en considération dans les expressions dont il s'agit, elles s'appliquent à un ensemble de filets de fluide, aussi bien qu'à chaque filet considéré à part.

Cas où l'orifice par lequel le fluide s'écoule est très-petit.

427. Si l'orifice est très-petit par rapport à toutes les sections transversales du vase, on peut admettre que, dans les filets de fluide AB dont il est question dans le n° 423, la section à l'extrémité B est aussi très-petite par rapport à toutes les autres sections. Considérons, comme dans le n° 418, le cas d'un tuyau qui se vide par l'extrémité inférieure. Nous devons employer, à la détermination du mouvement du fluide, l'équation (F)

du n° 417, et comme la section inférieure O′ est constante, on peut, pour plus de simplicité, écrire Ω au lieu de O′, et alors U désignera la vitesse de la section dont il s'agit. Mais, si l'on regarde Ω comme très-petite par rapport à toutes les autres sections du tuyau, le terme $\rho M\Omega \frac{dU}{dt}$ de l'équation (F) pourra être négligé, et, à plus forte raison, le terme $\frac{\rho U^2}{2}\frac{\Omega^2}{O^2}$. Cette équation donnera donc

$$U=\sqrt{2g\left(\frac{P-P'}{\rho g}+\zeta\right)};$$

en sorte que la vitesse, à l'extrémité du tuyau par laquelle le fluide s'écoule, ne dépend que des pressions extérieures et de la différence de niveau des deux extrémités de la colonne de fluide. Au moyen de cette expression de U, l'équation (G) du n° 417 donnera immédiatement une relation entre S et t, et, par conséquent, la loi du mouvement de l'extrémité supérieure de la colonne de fluide. Quant à la valeur de la pression, l'équation (E) du même numéro se réduit ici à

$$p=P+\rho gz,$$

d'où l'on conclut que la pression ne diffère pas de celle qui aurait lieu si le fluide n'avait aucun mouvement.

En appliquant maintenant, d'après les notions présentées n° 423, ces résultats aux cas où le fluide s'écoulerait hors d'un vase d'une figure quelconque par un orifice très-petit, on voit que les termes dont la détermination exigeait la connaissance de la figure des filets du fluide ayant disparu à raison de la petitesse

supposée de l'orifice d'écoulement, les expressions précédentes de la vitesse à l'orifice et de la pression dans l'intérieur du vase pourront être employées. Ainsi, l'on doit admettre que lorsqu'un fluide incompressible s'écoule hors d'un vase par un orifice très-petit, la pression extérieure étant supposée la même à la surface supérieure du fluide et à l'orifice, 1° la vitesse à l'orifice est constamment due à la hauteur variable de la surface supérieure du fluide sur le centre de cet orifice; 2° la pression dans l'intérieur du vase est la même qui aurait lieu si le fluide ne se mouvait pas.

Les résultats précédents s'appliquent à plus forte raison au cas d'un vase entretenu constamment plein. La quantité désignée par β dans le n° 420 étant très-grande, la vitesse U acquiert presque instantanément la valeur constante (M) du même numéro, laquelle se réduit à

$$U=\sqrt{2g\left(\frac{P-P'}{\rho g}+\zeta\right)};$$

ou à

$$U=\sqrt{2g\zeta},$$

dans le cas où les pressions extérieures sur les tranches extrêmes sont égales entre elles.

Les expressions du n° 426 donnent exactement les efforts supportés par le vase, en prenant pour Ω l'aire de l'orifice.

L'expression $F=-\rho\Omega U^2$ de l'effort horizontal auquel donne lieu l'émission du fluide par un orifice dont le plan est vertical revenant à $F=-\rho g\Omega.2\zeta$, lorsqu'on remplace U par la valeur précédente $\sqrt{2g\zeta}$, on voit que le

vase est repoussé en sens contraire du mouvement du fluide par un effort égal au poids d'une colonne de fluide ayant pour base l'orifice et pour hauteur le double de la charge qui a lieu sur le centre de cet orifice. Ce résultat donne l'explication de divers phénomènes remarquables.

Cas où l'orifice n'est point évasé. — Contraction de la veine fluide.

428. On a indiqué dans le n° 423 ce que l'on entendait par un orifice *évasé*. Les résultats présentés dans ce numéro et les suivants, ne conviennent qu'aux cas où le fluide s'écoule par un orifice de cette espèce. Ils donneront alors les moyens de calculer le volume de fluide écoulé dans un temps donné, puisqu'ils font connaître la vitesse du fluide dans les différentes parties du plan de l'orifice, et que les filets rencontrant ce plan à angles droits, le volume qui s'écoule dans l'unité de temps est le produit de l'aire de chaque partie de l'orifice par la vitesse correspondante. Les calculs faits conformément à ces principes s'accordent avec les observations. Il faut seulement excepter les cas où les dimensions transversales du vase sont fort petites par rapport à sa longueur, comme dans les tuyaux servant à conduire l'eau, parce que les effets des forces d'adhérence qui existent entre les parties du fluide et des parois deviennent alors très-sensibles, et ne peuvent être négligés sans qu'il en résulte de grandes erreurs.

Quand un orifice n'est pas évasé, la seule différence de ce cas au précédent consiste en ce que les filets de

fluide ne traversent plus tous le plan de l'orifice, suivant des directions perpendiculaires à ce plan. Cette circonstance n'empêche pas que les vitesses des molécules, à l'instant où elles traversent le plan de l'orifice, n'aient les valeurs qui seraient déterminées par les règles exposées ci-dessus; mais elle s'oppose à ce que l'on puisse déduire de la seule connaissance de ces vitesses l'évaluation du volume de fluide qui s'écoule dans un temps donné. En effet, la dépense de chaque filet doit s'estimer par le produit de la vitesse multipliée par l'aire de la partie correspondante de l'orifice projetée sur un plan perpendiculaire à la direction du filet, direction que la théorie précédente ne détermine pas en général.

Cette obliquité dans la direction d'une partie des filets, et particulièrement de ceux qui sont le plus voisins du contour de l'orifice, produit ce qu'on appelle la *Contraction de la veine fluide*. Lorsqu'un fluide jaillit hors d'un orifice évasé, la veine présente, au sortir de l'orifice, la figure d'un cylindre ou d'un prisme droit, dont la base est l'orifice même, et dont l'axe est perpendiculaire au plan de cet orifice. Mais si l'évasement n'a pas lieu; si, par exemple l'orifice NN (fig. 44) consiste simplement dans une ouverture faite dans une paroi plane et mince, la veine se contracte au sortir de cet orifice avant de prendre une figure cylindrique ou prismatique, et sa section *nn* est alors très-sensiblement moindre que l'aire NN de l'orifice. On conçoit d'ailleurs que les filets pouvant être regardés comme traversant la section contractée *nn* avec des directions perpendiculaires au plan de cette section, on peut considérer la partie N*nn*N

comme un prolongement du vase et appliquer à la section *nn* les résultats présentés ci-dessus et qui conviennent à un orifice évasé. Mais cette remarque ne mettrait pas encore à même d'évaluer la quantité de fluide écoulé dans un temps donné, parce que l'on ne peut assigner d'avance le rapport des sections NN et *nn*. On peut seulement affirmer que ce rapport est toujours compris entre les nombres 1 et 2.

On voit par ce qui précède que les notions exposées dans cet article ne peuvent faire connaître avec certitude l'écoulement du fluide hors d'un vase que si l'orifice est évasé. Dans tout autre cas il est nécessaire de recourir à des règles déduites d'observations spéciales. L'expérience a appris que dans le cas d'un orifice ouvert dans une paroi plane et mince, le rapport de la section *nn* à la section NN diffère peu de 0,62. Ce résultat subsiste lors même que l'on fait varier dans des limites assez étendues, la figure de l'orifice et ses dimensions absolues. Il en résulte que l'on peut alors, si l'orifice est fort petit par rapport aux sections du vase, estimer le volume de fluide écoulé dans l'unité de temps, par la formule

$$0{,}62.\Omega\sqrt{2g\zeta},$$

Ω désignant l'aire de cet orifice et ζ la charge de fluide qui a lieu sur son centre.

429. Les résultats qui viennent d'être présentés ne peuvent être appliqués que si la grandeur de la section dans l'intérieur du vase varie par degrés insensibles, et surtout s'il n'y a pas dans ce vase d'étranglement, c'est-à-dire de rétrécissement subit dans la section, ou

de changement brusque dans la direction du mouvement du fluide. Lorsqu'un vase présente des modifications de cette nature, la détermination du mouvement du fluide devient plus difficile, et exige des considérations spéciales.

Mouvement d'un fluide élastique dans un vase.

430. Les équations (A) et (B) du n° 413, expriment généralement les conditions du mouvement d'un fluide coulant dans un tuyau dont les dimensions transversales sont supposées très-petites. En supposant ce fluide élastique, et la température uniforme et constante, on posera $p = k\rho$, ce qui changera ces équations en

$$k\frac{dp}{p} = gdz - \frac{du}{dt}ds - \frac{1}{2}d.u^2,$$

$$\omega\frac{dp}{dt} + \frac{d.p\omega u}{ds} = 0;$$

et l'on ne doit point oublier que les différentielles dp, dz et du^2 dans la première, sont prises en faisant varier s seule.

431. Considérant seulement ici, pour plus de simplicité, le cas analogue à celui du n° 420, nous supposerons que le tuyau par lequel le fluide s'écoule, prend naissance dans un réservoir ou gazomètre, où la pression est maintenue à la valeur constante P, et que la section extrême du même tuyau est placée dans un milieu où la pression est aussi maintenue à une valeur constante P′ moindre que P. Dans ce

cas, le mouvement du fluide parviendra presqu'instantanément à un état permanent, que les équations précédentes feront connaître en y faisant $\frac{du}{dt}=0$ et $\frac{dp}{dt}=0$; ce qui les réduit à

$$k\,\frac{dp}{p}=gdz-\frac{1}{2}.d.u^2 \quad \text{et} \quad \frac{d.p\omega u}{ds}=0.$$

La première donne en intégrant

$$k.lp=const.+gz-\frac{1}{2}\,u^2.$$

En désignant, comme dans les numéros précédents, par Ω l'aire de la dernière section du tuyau et par U la vitesse à cette section, on aura toujours pour la seconde équation $p\omega u=P'\Omega U$. Si donc on désigne encore par O l'aire de la première section du tuyau, l'équation précédente donnant pour cette section

$$k.lP=const.-\frac{U^2}{2}\,\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2},$$

on voit que l'on a pour une section quelconque

$$k.l\frac{p}{P}=gz-\frac{U^2}{2}\left(\frac{P'^2\Omega^2}{p^2\omega^2}-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right),$$

et pour la section extrême

$$k.l\frac{P'}{P}=g\zeta-\frac{U^2}{2}\left(1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}\right);$$

d'où l'on déduit pour l'expression de la vitesse d'écoulement du fluide,

$$U=\sqrt{\frac{2k.l\frac{P}{P'}+2g\zeta}{1-\frac{P'^2\Omega^2}{P^2O^2}}}.$$

La vitesse U étant déterminée, l'équation précédente fera connaître la valeur de la pression p qui a lieu dans la section quelconque ω.

432. Dans la plupart des cas qui pourront se présenter, le terme $2g\zeta$ sera fort petit par rapport au terme $2k.l\frac{P}{P'}$ et pourra être négligé. Si de plus on suppose très-petit le rapport $\frac{\Omega}{O}$ des sections extrêmes du tuyau, l'expression précédente de U se réduira à

$$U=\sqrt{2k.l\frac{P}{P'}},$$

et l'équation qui donne la pression à

$$\frac{l\frac{P}{p}}{l\frac{P}{P'}}=\frac{\frac{P^2O^2}{p^2\omega^2}-1}{\frac{P'^2\Omega'^2}{P^2O^2}}.$$

L'expression précédente de U peut être employée pour calculer le volume de fluide élastique qui s'écoule dans un temps donné, sous une pression constante P', par un orifice très-petit évasé. Si l'orifice n'était pas évasé, on devrait avoir égard aux remarques présentées n° 428, comme s'il s'agissait d'un fluide incompressible.

XXX. De la résistance des fluides.

433. L'expression de *Résistance des fluides*, désigne en général l'effort qu'il est nécessaire d'exercer pour maintenir immobile un corps qui reçoit le choc d'un fluide, ou pour faire mouvoir un corps qui est plongé

dans un fluide. La connaissance exacte des efforts de cette nature est un objet d'une grande importance dans les applications aux arts mécaniques. Pour présenter sur ce sujet des notions précises, on distinguera deux cas principaux, 1° celui d'une veine de fluide jaillissant par l'orifice d'un vase et venant choquer un corps dont les dimensions sont plus grandes que celles de cette veine; 2° celui d'un corps plongé dans un courant de fluide d'une étendue indéfinie.

Du choc d'une veine fluide.

434. Soit en premier lieu une veine de fluide incompressible jaillissant dans une direction horizontale d'un orifice évasé NN (fig. 45), au choc de laquelle on a présenté le plan PP placé perpendiculairement à l'axe AB de cette veine. En sortant de l'orifice, *tous les filets* de fluide sont parallèles à l'axe, et si l'étendue du plan PP est suffisante, ils ont pris en arrivant à son contour, des directions parallèles à ce plan, et par conséquent perpendiculaires à la ligne AB. Considérons un de ces filets dans l'intervalle NP compris entre la section NN et le contour du plan. On peut le concevoir coulant dans un tuyau d'une section très-petite; et les formules exposées dans les n°s 421 et 422, exprimeront les efforts exercés contre ce tuyau dans des directions données, ou les forces qu'il faudrait lui appliquer pour le maintenir immobile. Mais il est évident que les efforts résultant du mouvement du fluide dans chaque filet, se transmettent d'un filet à un autre, et que si l'on prend pour chacun des filets, l'effort qui résulte du mouvement du fluide dans le sens de la ligne AB, la somme de tous ces

efforts sera l'effort exercé contre le plan PP. D'après cela, en appliquant ici les résultats du n° 421 ; supposant l'axe des y parallèle à la ligne AB, et la vitesse du fluide constante par rapport au temps ; observant que pour un filet quelconque, l'angle μ est nul et l'angle μ' droit, on aura pour l'effort produit dans une direction parallèle à la ligne AB par le mouvement du fluide dans ce filet, $F=\frac{\rho\Omega^2U^2}{O}$. Si l'on suppose dans cette expression $O=\Omega$, U désignera la vitesse à la section O, c'est-à-dire à l'extrémité du filet placée en NN, et l'on aura $F=\rho\Omega U^2$. Cette expression étant commune à tous les filets qui composent la veine, on en conclura que l'effort exercé contre le plan par le choc du fluide, est exprimé par $\rho\Omega U^2$, Ω désignant l'aire de l'orifice NN et U la vitesse à cet orifice. Ce résultat est confirmé par les observations, pourvu que les circonstances indiquées aient effectivement lieu ; c'est-à-dire pourvu que l'orifice soit évasé, et que le plan choqué soit assez grand pour que les filets de fluide aient tous pris, quand ils en atteignent le contour, des directions parallèles à ce plan.

Si l'orifice NN n'était pas évasé, en sorte que la veine se contractât après sa sortie de l'orifice, conformément à ce qui a été exposé n° 428, on appliquerait la formule précédente en prenant pour Ω l'aire de la section de la veine dans l'endroit où elle est devenue sensiblement cylindrique et pour U la vitesse du fluide dans cette section.

En rapprochant le résultat précédent de celui qui a été présenté à la fin du n° 417, on voit que l'effort exercé contre le plan PP par le choc du fluide est égal à l'effort

exercé en sens contraire contre le vase d'où le fluide s'écoule. L'application du principe de la conservation du mouvement du centre de gravité rend raison de l'égalité nécessaire de ces deux efforts.

424. Si la veine jaillissait verticalement de haut en bas, l'effort supporté par le plan horizontal PP qui en recevrait le choc serait exprimé par $\rho\Omega U^2+\Pi$, en désignant par Π le poids du fluide contenu en NPPN, poids qui ne peut être déterminé sans la connaissance complète du mouvement du fluide. Dans le cas où la veine jaillirait au contraire de bas en haut, l'effort serait exprimé par $\rho\Omega U^2-\Pi$.

436. Admettons maintenant que l'on présente au choc d'une veine horizontale, un conoïde convexe dont l'axe coïncide avec celui de cette veine (fig. 46). Tous les filets de fluide formeront en P avec cet axe AB un même angle que nous désignerons par ψ. En appliquant au cas dont il s'agit, comme dans le n° 434, l'expression de F trouvée n° 421, on devra donc supposer $\mu=0$ et $\mu'=\psi$, ce qui donnera $F=\rho\Omega^2U^2\left(\frac{1}{O}-\frac{\cos.\psi}{O'}\right)$, et en faisant toujours $\Omega=O$, $F=\rho\Omega U^2\left(1-\frac{\Omega}{O'}\cos.\psi\right)$. Cette expression étant commune à tous les filets, on peut prendre pour la valeur de l'effort exercé contre le conoïde, la formule

$$\rho\Omega U^2\left(1-\frac{\Omega}{O'}\cos.\psi\right),$$

* On entend ici par *conoïde* un corps ressemblant à un tronc de cône droit, terminé par un segment sphérique tangent au cône.

Ω désignant toujours l'aire de l'orifice NN et U la vitesse du fluide à cet orifice. Mais dans cette formule le rapport $\frac{\Omega}{\sigma}$, des aires des sections de chaque filet en N et en P demeure inconnu. On remarquera qu'il ne peut y avoir une grande erreur à supposer que la plupart des filets de fluide affectent des figures telles que la vitesse absolue des molécules ne varie pas d'une manière sensible de N en P, et par conséquent que les sections transversales de ces filets ne varient pas non plus sensiblement. D'après cette hypothèse on fera $\frac{\Omega}{\sigma} = 1$, et l'on regardera l'effort supporté par le conoïde comme étant donné par l'expression

$$\rho\Omega U^2(1-\cos.\Psi).$$

Si le conoïde recevait le choc de la veine sur sa concavité, on pourrait appliquer les considérations précédentes en changeant le signe du cosinus de l'angle Ψ. L'effort résultant du choc serait exprimé par

$$\rho\Omega U^2(1+\cos.\Psi).$$

Cette formule donnerait pour la valeur de cet effort

$$2.\rho\Omega U^2 \text{ ou } \rho g\Omega.4\zeta,$$

(ζ étant la hauteur due à la vitesse U), si la forme du conoïde était telle que les filets du fluide fussent réfléchis en sens contraire de la veine. Ces résultats sont à fort peu près conformes aux effets naturels, ainsi qu'on peut le conclure d'expériences spéciales dues à *Morosi*.

437. Nous admettrons enfin que l'on présente, au choc d'une veine dont l'axe AB (fig. 47) est dirigé d'une manière quelconque, un plan PP dont la direction est égale-

ment arbitraire. Nous supposons toujours ce plan assez grand pour que les filets de fluide, en le quittant en P, soient dirigés parallèlement à sa surface. Soit ψ l'angle que le plan PP forme avec l'axe AB, α l'angle que la perpendiculaire à ce même plan forme avec la verticale, Π le poids du fluide contenu dans l'espace NNPP, F la force qui doit être appliquée perpendiculairement au plan, pour le maintenir dans sa position et résister au choc du fluide. On connaîtra la force F en remarquant que, dans le système formé du plan PP et du fluide contenu en NNPP, il doit toujours y avoir équilibre entre les quantités de mouvement acquises pendant l'intervalle de temps dt et les quantités de mouvement imprimées par les forces qui agissent sur le système prises en sens contraire. Considérons ici les quantités de mouvement acquises et imprimées, en les décomposant perpendiculairement au plan PP. Pendant un instant dt il entre en NN dans le système la masse de fluide $\rho\Omega U dt$, dont la quantité de mouvement décomposée perpendiculairement au plan est $\rho\Omega U dt.U\sin.\psi$. Pendant le même instant il sort en PP une masse de fluide, dont la quantité de mouvement dans le sens perpendiculaire au plan est nulle. Donc, la quantité de mouvement acquise dans ce sens est $-\rho\Omega U\sin.\psi$. D'autre part, la quantité de mouvement imprimée dans le même sens par l'action de la gravité sur le fluide contenu en NNPP et par l'effort F est $\Pi\cos.\alpha.dt - F dt$. Le principe énoncé ci-dessus donnera donc l'équation

$$-\rho\Omega U dt.U\sin.\psi - \Pi\cos.\alpha.dt + F dt = 0,$$

d'où

$$F = \Pi\cos.\alpha + \rho\Omega U^2\sin.\psi.$$

Si le plan est vertical, on a simplement

$$F = \rho \Omega U^2 \sin . \Psi .$$

Il existe plusieurs expériences, dont quelques-unes sont dues au docteur *Vince*, qui s'accordent avec ce résultat.

De la résistance des fluides dans le cas d'un corps plongé dans un fluide indéfini.

438. Concevons un corps maintenu immobile, et placé dans un courant de fluide dont la direction est horizontale et dont la vitesse est uniforme. Il s'agit de connaître l'effort supporté par le corps dans la direction du courant par l'effet du choc du fluide; c'est-à-dire l'effort qui tend à déplacer le corps dans cette direction. La solution générale de cette question, qui exigerait la détermination complète des modifications que le mouvement du fluide subit à la rencontre du corps, n'a pas été donnée : on ne peut présenter sur ce sujet que quelques aperçus, et indiquer divers résultats obtenus par des expériences spéciales.

Imaginons que l'on ait enveloppé le corps par une surface cylindrique ayant ses arêtes parallèles à la direction du courant. La ligne de contact de cette surface avec celle du corps partagera cette dernière en deux parties. Nous appellerons *face antérieure* du corps la partie qui reçoit le choc du courant, et *face postérieure* la partie opposée, dont le courant s'éloigne. Pour connaître l'effort supporté par le corps dans la direction du courant, il faudrait évidemment décomposer, dans le sens de cette direction, les pressions supportées par toutes les parties de la face antérieure, et

prendre la somme de ces composantes; puis faire la même opération pour la face postérieure. Ces deux sommes, comme on l'a vu dans le n° 382, sont toujours égales et directement opposées si le fluide n'a pas de mouvement. Mais il n'en est pas de même lorsque le fluide se meut : la somme donnée par la face antérieure est alors plus grande que la somme donnée par la face postérieure, et l'excès de la première somme sur la seconde est l'effort supporté par le corps, ou la résistance qu'il oppose au mouvement du fluide. On voit donc que la question dont il s'agit se ramène à considérer la surface du corps comme une paroi solide contre laquelle s'appuie le fluide en mouvement, et à déterminer la pression exercée par le fluide contre les diverses parties de cette paroi. Mais cette détermination, comme on l'a déjà remarqué, exige la connaissance *complète* du mouvement du fluide, c'est-à-dire l'intégration des équations différentielles qui expriment les conditions de ce mouvement, intégration qui ne peut avoir lieu en général par les méthodes analytiques connues, et même en supposant au corps présenté au choc du fluide la figure la plus simple.

439. Si l'on veut, d'ailleurs, se former une idée de la nature de la résistance dont il s'agit, on peut faire les remarques suivantes.

Soit un corps de figure quelconque présenté au choc du courant (fig. 48); PP étant la face antérieure, et QQ la face postérieure. L'effet de la présence de ce corps est de modifier le mouvement du fluide, de telle manière que les filets qui devraient se mouvoir suivant des directions rectilignes et parallèles à AB, décrivent des courbes telles

que *amb*, dont la figure dépend principalement de la figure du corps. Cette modification s'étend à une certaine distance de la surface de ce corps, au delà de laquelle le mouvement naturel du fluide n'est pas sensiblement altéré. On peut se représenter la figure formée par l'ensemble des filets de fluide dont la direction est ainsi changée. Les courbes *amb* décrites par les filets offriront toujours deux parties; l'une *am*, dans laquelle ils tourneront leur convexité vers le corps, l'autre *mb*, dans laquelle ils présenteront au corps leur concavité. Dans la première partie, la vitesse croît de *a* à *m*; et, dans la seconde partie, elle décroît de *m* vers *b*. Si, d'ailleurs, on considère le filet *amb* comme coulant de *a* en *m* dans une paroi solide, on déterminerait l'effort exercé sur cette paroi parallèlement à la direction AB du courant d'après les formules données n° 422. Tous ces efforts se transmettent d'un filet à l'autre, et sont supportés par la face antérieure PP du corps. C'est par cette raison que cette face supporte une pression plus grande qu'elle ne le ferait si le fluide était sans mouvement. Quant à la partie *mb* des filets, l'effort que supporterait leur paroi se trouverait dirigé en sens opposé par rapport au corps. Les efforts provenant de la déviation des filets de fluide dans cette partie sont donc supportés par le fluide environnant, et la pression contre la force postérieure QQ est plus petite que la pression qui aurait lieu dans l'état de repos du fluide. Les notions que nous présentons ici sont conformes à toutes les indications qui ont été obtenues par des observations et des expériences directes.

En considérant, d'ailleurs, les expressions des quan-

tités E ou F du n° 422, on voit qu'elles se composent de trois facteurs, savoir la densité ρ du fluide; le produit $U\Omega^2$; et la quantité $\cos.\lambda'\frac{\Omega}{O}\cos\lambda$ qui dépend de la direction du tuyau à ses extrémités et du rapport des sections extrêmes. Or, les rapprochements auxquels donnent lieu les résultats des observations conduisent à penser : 1° que si les figures des corps sont semblables, les dimensions absolues seules étant changées, l'ensemble des filets de fluide déviés de leur direction présente aussi des figures semblables, dans les différentes parties desquelles les vitesses des molécules conservent les mêmes rapports, en sorte que rien ne sera changé dans l'expression de l'effort correspondant à chaque filet, si ce n'est le facteur Ω qui aura augmenté comme le quarré des dimensions linéaires du corps; 2° que le corps restant le même, la figure *formée par les filets* de fluide, ainsi que les rapports des vitesses des molécules dans les diverses parties de ces filets, ne changent point lorsque la vitesse du courant varie, en sorte que les efforts demeurent toujours proportionnels au quarré de cette vitesse.

440. En admettant ces résultats, qui ne peuvent être fort éloignés de la vérité, on représentera en général l'effort exercé sur un corps exposé à l'action d'un courant de fluide par la formule

$$k.\rho\Omega U^2,$$

dans laquelle Ω désigne l'aire de la plus grande section transversale du corps, U la vitesse du courant, et k un coefficient constant pour tous les corps de figure sem-

blable, mais qui devra changer d'une figure à une autre, et dont la valeur ne peut être connue que par des expériences directes.

On peut aussi écrire, au lieu de l'expression précédente,

$$\pi\omega.kH,$$

en désignant par π le poids de l'unité de volume de fluide, et par H la hauteur due à la vitesse du courant. D'après cette dernière forme donnée à l'expression dont il s'agit, on se représente l'effort exercé contre le corps comme le poids d'une colonne de fluide dont la section transversale de ce corps est la base, et dont la hauteur est le multiple k de la hauteur H due à la vitesse du fluide. Ainsi, la recherche est ramenée à déterminer la valeur du coefficient k qui convient aux corps de diverses figures.

Les notions précédentes ont été présentées en considérant un corps immobile exposé à un courant de fluide. Elles peuvent également convenir à un corps mû dans un fluide en repos, ou dans un courant de fluide dont la vitesse est différente de la sienne. Dans ce dernier cas, U désignerait la vitesse relative du corps et du fluide. On regarde généralement l'expression $\pi\omega.kH$, et les mêmes valeurs du coefficient k, comme convenant également à ces divers cas.

441. Les résultats que l'on vient d'exposer sont conformes à la nature du phénomène de la résistance des fluides considéré d'une manière générale. On doit néanmoins avoir égard à diverses considérations particulières d'après lesquelles ces résultats doivent dans quelques

cas être modifiés, et dont nous indiquerons les principales :

1° L'adhérence des molécules du fluide produit des effets sensibles quand la vitesse du courant est petite et le corps très-petit ou très-allongé dans le sens du mouvement. Il faudrait alors, pour représenter les effets naturels, ajouter à l'expression du n° 440 un terme proportionnel à la première puissance de la vitesse.

2° Dans les fluides élastiques, la densité du fluide croissant avec la pression contre la face antérieure du corps, la résistance croît plus rapidement que le quarré de la vitesse. Cette modification ne devient sensible qu'autant que les vitesses sont très-grandes.

3° Quand un corps se meut dans l'eau fort près de la surface, et, à plus forte raison, quand il s'agit d'un corps flottant, le mouvement des *filets de fluide* est altéré d'une autre manière que si le fluide est indéfini dans tous les sens. De plus, la surface du fluide subit une *dénivellation* par l'effet de laquelle les pressions dues au poids du fluide sur les diverses parties de la surface du corps sont changées. Il en résulte un accroissement dans la résistance, que l'on pourrait représenter par un terme proportionnel à la quatrième puissance de la vitesse. Ceci suppose, d'ailleurs, que le corps présente toujours la même surface au choc du fluide. L'expérience montre que, dans quelques cas, le corps prend, à mesure que la vitesse augmente, une position différente par rapport à la surface de l'eau, ce qui change la loi de la résistance.

4° On peut toujours concevoir une valeur de la vitesse

tellement grande que le fluide ne remplirait pas le vide qui tend à se former contre la face postérieure du corps. L'expression de la résistance changerait alors entièrement de nature. L'effort supporté par un corps plongé dans l'eau dépendrait dans ce cas de sa distance à la surface supérieure du fluide.

442. Nous indiquerons maintenant les principaux résultats qui ont été déduits de l'expérience, en remarquant en premier lieu, à l'égard des surfaces planes présentées directement au choc du fluide, que des plans de diverses grandeurs, auxquels on suppose à tous une épaisseur fort petite, ne sont pas des corps de figures semblables : on ne peut donc s'étonner qu'ici la résistance ne soit pas proportionnelle à l'aire du plan. Le coefficient k croît avec la valeur absolue de cette aire. Les expériences indiquent que l'on a à peu près $k = 1,4$, lorsque la racine quarrée de l'aire est $0^m,1$; et $k = 1,5$, lorsque cette racine est $0^m,32$. On n'a pas d'expériences suffisamment précises pour des surfaces plus grandes; mais il paraît que pour des plans de la dimension des ailes des moulins ou des voiles des vaisseaux, on aurait k au moins égal à 3.

Le tableau suivant donne les valeurs du coefficient k qui conviennent à divers corps.

	VALEURS DU COEFFICIENT k.
Pour une sphère mue dans l'eau ou dans l'air avec une vitesse médiocre.	0,6
Pour une sphère, mue dans l'air avec une vitesse de 50^m par seconde.	0,7
——————————— 250. . .	0,81
——————————— 300. . .	1,04
Prisme rectangulaire, à bases planes, la longueur étant à peu près égale à la largeur.	1,4
Idem, la longueur étant six à dix fois la largeur.	1,1
Bateau rectangulaire sans proue, avec une poupe.	1
Idem, avec une poupe et une proue formée de deux plans verticaux dont la saillie est égale à la largeur.	0,55
Idem, la saillie de la proue étant double de la largeur. . .	0,45
Idem, la proue étant formée par un demi-cylindre vertical.	0,5
Idem, la proue étant formée par le prolongement du prisme coupé en dessous par un plan incliné de 30° sur l'horizon. .	0,45
Bateau ayant la forme des meilleurs vaisseaux naviguant sur la mer.	0,18

Le dernier résultat indique, selon toute apparence, la moindre valeur que puisse prendre le coefficient k. Ces évaluations supposent d'ailleurs au fluide des dimensions transversales beaucoup plus grandes que celles du corps. On sait que la résistance des bateaux augmente très-sensiblement dans des canaux étroits ou peu profonds.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE ANNÉE.

		Pages.
I.	Principes de la statique. — Composition des forces. .	1
II.	Composition et équilibre de plusieurs forces appliquées à un point matériel.	13
	Équilibre d'un point matériel assujetti à demeurer sur une surface ou sur une ligne courbe données..	16
	Principe des vitesses virtuelles considéré dans l'équilibre d'un point matériel.	20
III.	Composition et équilibre de plusieurs forces parallèles appliquées à un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable.	25
	Autre méthode pour obtenir les résultats précédents. . .	33
	Centre des forces parallèles.	40
IV.	Composition et équilibre de plusieurs forces dirigées arbitrairement et appliquées à un système de points matériels assujettis entre eux d'une manière invariable. . .	42
	Cas où toutes les forces appliquées au système sont dirigées dans un même plan.	48
	Conditions de l'équilibre lorsqu'il existe un point fixe autour duquel le système peut tourner librement dans tous les sens.	50
	Conditions de l'équilibre lorsqu'il existe dans le système deux points fixes.	*Ibid.*
	Conditions de l'équilibre dans le cas où un corps solide soumis à l'action de diverses forces s'appuie par un ou plusieurs points contre des surfaces fixes données.. . .	54

Pages.

V. Centres de gravité. 56
Usage des centres de gravité pour l'évaluation des aires et des volumes. 72

VI. Notions fondamentales de la dynamique. 73

VII. Mouvement rectiligne des corps. 83
Mouvement rectiligne d'un corps produit par l'action de la gravité. 89
Mouvement rectiligne d'un corps grave, dans le cas où ce mouvement est altéré par une résistance. 93
Mouvement rectiligne d'un corps grave au-dessus et au-dessous de la surface de la terre, en ayant égard à la variation de la gravité. 103

VIII. Équations générales du mouvement d'un point matériel libre, sollicité par des forces quelconques. 108
Propriétés générales du mouvement d'un point matériel. — Conservation du mouvement rectiligne. . . . 117
Conservation du mouvement de rotation. — Principe des aires. 118
Conservation de la force vive. . . . . — 122

IX. Mouvement d'un point matériel sollicité par des forces quelconques, et assujetti à se mouvoir sur une ligne ou sur une surface données.. 126
Remarque relative au mouvement d'un point matériel entièrement libre. 132
Mouvement d'un point matériel sur une surface donnée. 134

X. Mouvement d'un point matériel pesant sur une courbe donnée. 141
Mouvement d'un point matériel pesant dans le cercle. — Pendule circulaire. 146
Mouvement d'un point matériel pesant dans la cycloïde. — Pendule cycloïdal. 152

XI. Mouvement des projectiles dans le vide et dans un milieu résistant. 154

XII. Mouvement des planètes et des satellites. — Lois de Kepler. Principe de la gravitation universelle. 162

Pages.

XIII. Mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe en raison inverse du quarré des distances. 170

XIV. Attraction d'un corps sphérique sur un point matériel. — Variations de la gravité à la surface de la terre. — Densité moyenne de la terre. 177

DEUXIÈME ANNÉE.

XV. Équilibre du polygone funiculaire.— Courbe funiculaire.— Chaînette 189

Cas où les points d'application des forces peuvent glisser librement le long du fil. 193

Courbe funiculaire.. 194

XVI. Principe des vitesses virtuelles.. 205

Démonstration générale du principe des vitesses virtuelles.. 213

Usage du principe des vitesses virtuelles pour la recherche des conditions d'équilibre d'un système de forces. 219

Exemples de l'application du principe des vitesses virtuelles. 227

Remarque générale. 238

XVII. Équation générale du mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces quelconques. — Principe de d'Alembert. 240

XVIII. Mouvement de deux points matériels pesants liés par un fil flexible. 248

Mouvement d'un fil parfaitement flexible et inextensible 252

XIX. Choc de deux corps solides. 256

Remarque. 265

XX. Mouvement d'un corps solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe.. 267

Détermination des axes principaux. 274

Propriétés des axes principaux relatives aux moments d'inertie. 278

Pages.

Évaluation des moments d'inertie. 287

Mouvement d'un corps pesant autour d'un axe fixe horizontal. Centre d'oscillation. 294

Mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe, produit par une impulsion.—Centre de percussion. 298

XXI. Mouvement d'un corps solide entièrement libre dans l'espace. 305

Mouvement d'un corps solide libre dans l'espace produit par une impulsion. 315

XXII. Propriétés générales du mouvement d'un système de corps. 325

Mouvement du centre de gravité. 326

Mouvement de rotation.— Principes des aires. . . . 332

Principe des forces vives. 342

Principe de la moindre action. 357

XXIII. Calcul de l'effet des machines. 359

XXIV. Équations générales de l'équilibre d'un fluide sollicité par des forces quelconques. 371

XXV. Équilibre des fluides incompressibles pesants. . . . 386

Calcul des pressions supportées par les parois des vases. 390

XXVI. Équilibre des corps flottants à la surface des fluides pesants. 399

Stabilité des corps flottants. 401

XXVII. Équilibre d'une colonne atmosphérique. — Nivellement barométrique. 419

XXVIII. Équations générales du mouvement d'un fluide sollicité par des forces quelconques. 436

Cas où la fonction $udx + vdy + wdz$ est une différentielle complète d'une fonction de x, y, z. 444

XXIX. Mouvement d'un fluide pesant dans un vase. — Hypothèse du parallélisme des tranches. 448

Mouvement d'un fluide incompressible et pesant, dans un tuyau dont les sections transversales sont très petites. 451

Pages.

Efforts supportés par le tuyau pendant le mouvement du fluide. 457
Mouvement d'un fluide incompressible et pesant dans un vase de figure quelconque 461
Cas où l'orifice par lequel le fluide s'écoule est très-petit. 465
Cas où l'orifice n'est point évasé. — Contraction de la veine fluide 468
Mouvement d'un fluide élastique dans un vase. . . . 471

XXX. De la résistance des fluides. 473
Du choc d'une veine fluide. 474
De la résistance des fluides dans le cas d'un corps plongé dans un fluide indéfini. 479

FIN DE LA TABLE.

PARIS.—IMPRIMERIE DE FAIN ET THUNOT,
IMPRIMEURS DE L'UNIVERSITÉ ROYALE DE FRANCE,
Rue Racine, 28, près de l'Odéon.

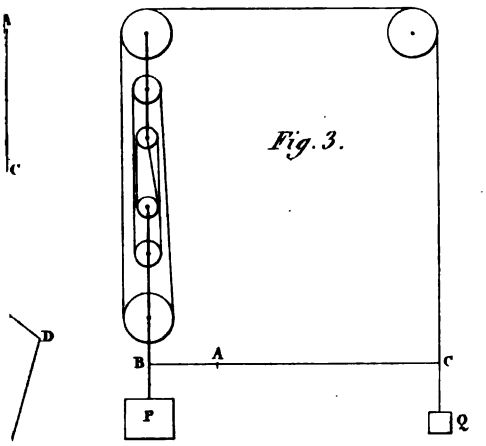


Fig. 3.

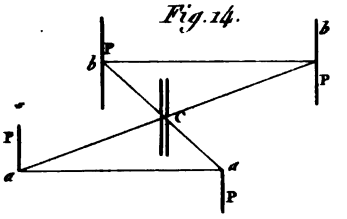
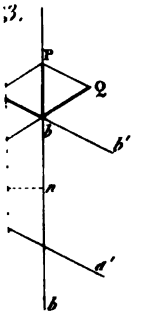


Fig. 14.



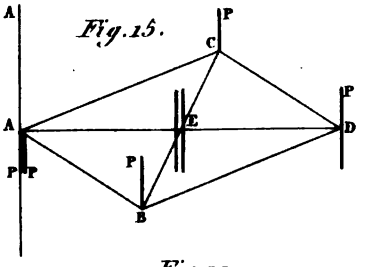


Fig. 15.

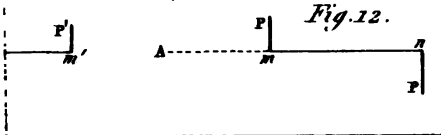


Fig. 12.

Gravé par Adam et Lemaitre.

Fig. 18.

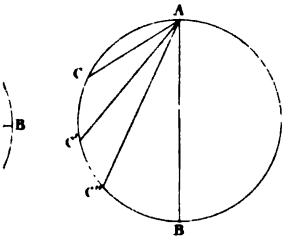
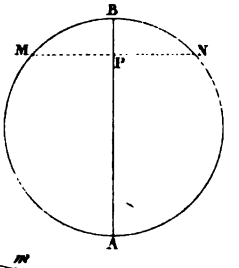


Fig. 19.



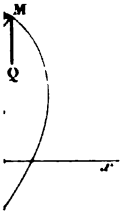


Fig. 22.

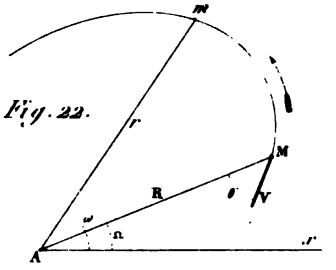
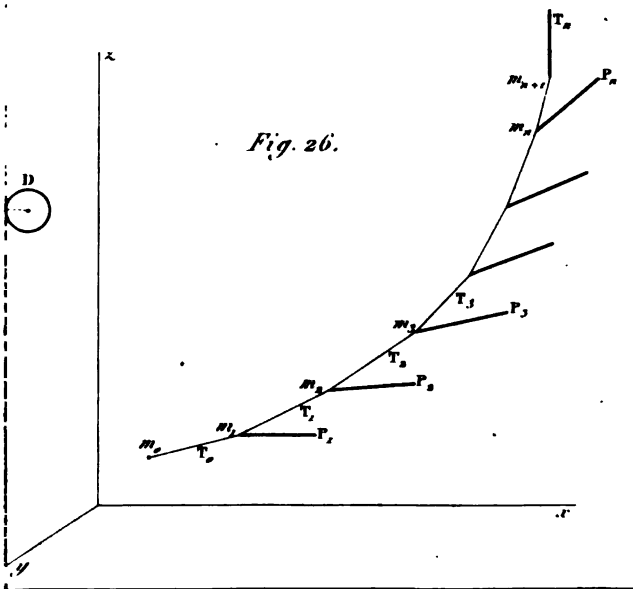


Fig. 26.



Gravé par Adam et Lemaître

28.

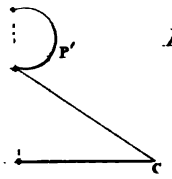


Fig. 29.

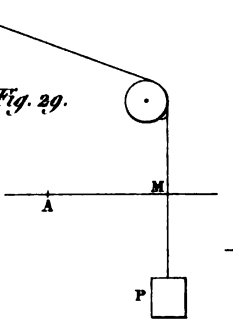


Fig. 32.

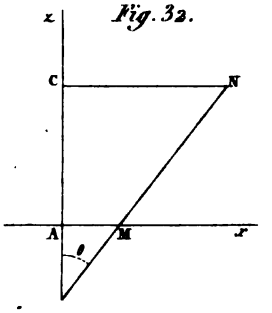


Fig. 31.

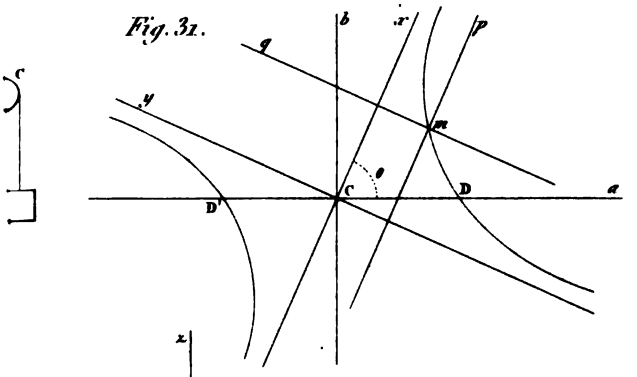


Fig. 35.

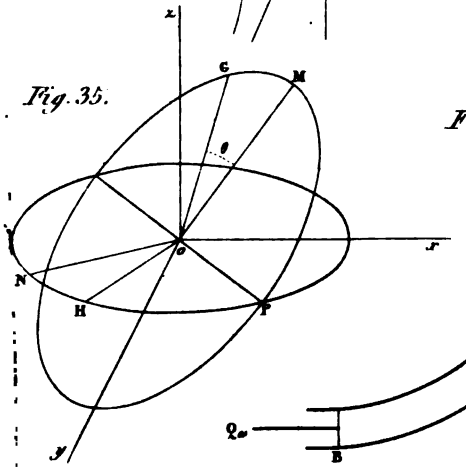
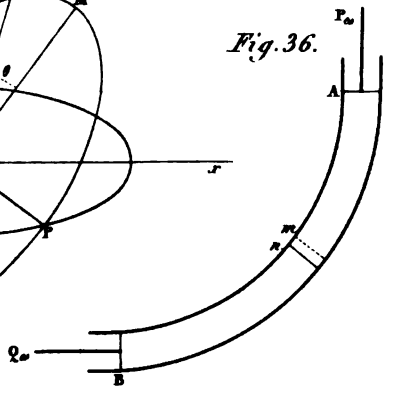
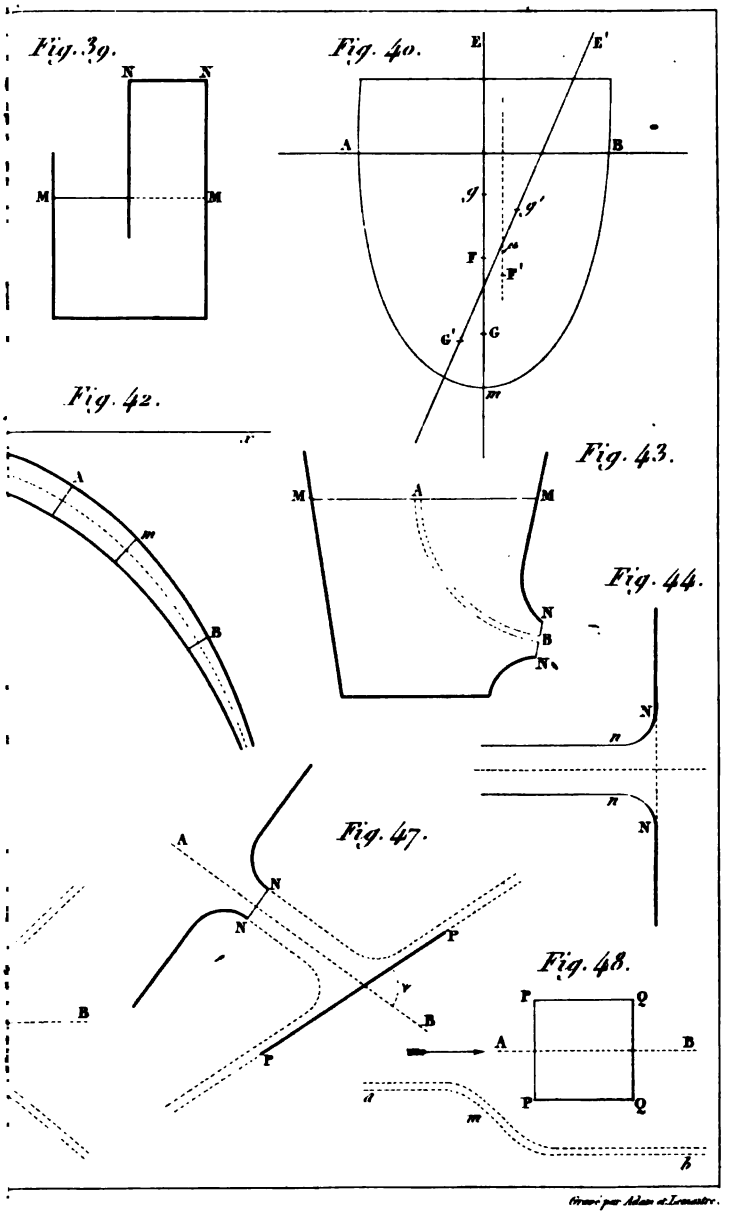


Fig. 36.



Gravé par Adam et Lemaître



Gravé par Adam et Lemaître.